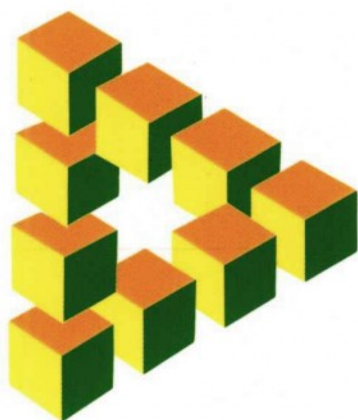
教师基本功丛书 · 数学教师卷

◎主编 曾大洋

如何上好一堂数学课



RuHe ShangHao YiTang ShuXueKe

华东师范大学出版社



教师基本功丛书・数学教师卷



如何备好一堂数学课

如何上好一堂数学课

数学作业的设计与评价

数学学困生的转化

如何命数学题

数学试卷分析方法

数学教育课题研究及论文撰写指导

多媒体数学课件制作



ISBN 978-7-5617-7209-6

9 787561 772096 >

定价：12.00元

www.ecnupress.com.cn

教师基本功丛书
数学教师卷

如何上好一堂数学课



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

如何上好一堂数学课/曾大洋主编.—上海:华东师范大学出版社,2009
(教师基本功丛书·数学教师卷)
ISBN 978-7-5617-7209-6

Ⅰ.如… Ⅱ.曾… Ⅲ.数学课—教学研究—中小学
Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第177008号

教师基本功丛书·数学教师卷
如何上好一堂数学课

主　　编　曾大洋
策划组稿　李文革
审读编辑　李文革
封面设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电话总机　021-62450163转各部门　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　890×1240　32开
印　　张　5.75
字　　数　148千字
版　　次　2009年10月第一版
印　　次　2009年10月第一次
印　　数　3100
书　　号　ISBN 978-7-5617-7209-6/G·4167
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人



目　录



第1章 如何进行数学问题情境教学

《义务教育数学课程标准》在第三学段的教学建议中指出："数学教学应从学生实际出发，创设有助于学生自主学习的问题情境，引导学生通过实践、思考、探索、交流，获得知识，形成技能，发展思维，学会学习，促使学生在教师指导下生动活泼地、主动地、富有个性地学习。"课程标准的这一教学建议使得"问题情境"成为数学课堂教学的重要组成部分，成为上好一堂课的重要指标。因此，在推进新课程实施的主阵地——课堂教学过程中，如何进行高质量的数学问题情境教学，并以此引导学生主动地学习数学、深入地思考数学，促进学生数学修养的提高，成为数学教师不容回避的问题。

第1节 对数学问题情境的认识

一、数学问题情境的组成

一位德国学者曾举过一个精妙的比喻：将15克盐放在你面前，无论如何你难以下咽。但当将15克盐放入一碗美味可口的汤中，你却在享用佳肴的同时，将15克盐全部吸收了。问题好比盐，情境犹如美味可口的汤。情境，只有溶入问题才能显现其活力；问题，只有源于情境才能显示其魅力。因此，可将"数学问题情境"理解为为

了实现教学目标而设置的教学环境，它是数学学习、数学思维和数学活动产生的具体条件。基于此理解，数学问题情境应由背景材料及由背景材料衍生出的系列问题组成。背景材料可以源于现实生活实际，也可以出自抽象的纯数学内容，但必须与学生生活或数学活动经验有关，它是知识与生活经验的接口，是数学知识发展的生长点，也是学生探索新知识的起点，由它能产生出一连串环环相扣、由浅入深的探索性问题。

二、数学问题情境的特点

数学问题情境具有以下特点：

1. **科学性**。作为问题情境的背景材料必须科学合理、表达清晰，延伸的探索问题串必须围绕教学目标展开。

2. **趣味性**。创设的问题情境必须能激发学生的学习兴趣和进一步探索的欲望。

3. **发展性**。由问题情境的背景材料拓展延伸出的探索问题，可以贯穿在整个教学过程中，因此在背景材料中，不但要有已知，而且要隐含着未知，体现从现有发展区、最近发展区到较远的知识区的发展过程。

4. **探究性**。创设的问题情境应能启迪学生的思维，有不同的路径和不同的方法，能引发学生广泛的类比、联想、猜想与推广。

5. **层次性**。由于学生的认知差异，他们会出现探索过程的思维差与时间差，为了使不同层次的学生在课堂同一时间段内都拥有自己独立思考的空间，由背景材料引出的探索问题串必须呈现出由浅入深的层次性。

三、数学问题情境中问题的呈现方式

数学问题情境中问题的呈现方式分两步：先由教师就背景材料引出问题，让学生自主探索或小组合作学习，再逐步过渡到学生自己从背景材料中发现并提出问题，进而解决问题。

第 2 节　对数学问题情境教学的认识

一、数学问题情境教学的意义

问题情境教学的渊源可追溯到古希腊苏格拉底的问题教学法或谈话法。20 世纪初，美国著名教育家杜威也曾提倡过问题教学，其核心就是问题情境。之后的布鲁纳发现学习法也主张创设问题情境，他认为："学习者在一定的问题情境中，经历对学习材料的亲身体验和发展过程，才是学习者最有价值的东西。"一切学习都是在一定的环境条件下进行的，数学问题情境教学也不例外。

数学问题情境教学有两方面意义。从心理意义上讲，它能激发学生的学习兴趣，能唤起学生对知识的渴求，让学生在学习中伴随着一种积极的情感体验，使学生积极主动地投入学习。从数学意义上讲，它可以帮助学生了解数学与生活的联系，让学生体会数学的价值；可以让学生经历数学化的过程，培养学生的问题意识，增强学生的数学应用意识。

二、数学问题情境教学的目的

数学问题情境教学的目的在于：通过学生对教师所创设的问题情境进行深入细致的观察分析，培养学生的观察能力与直觉思维能力；通过让学生解决由背景材料引出的问题，培养学生分析问题和解决问题的能力，进而提高学生的实践能力；通过让学生针对背景材料提出相关的数学问题，培养学生提出问题的能力与抽象思维能力，进而培养学生的问题意识和创新意识。

三、数学问题情境教学的原则

数学问题情境是千姿百态、丰富多彩的，它可以源于现实生活，

也可以出自数学自身，但无论如何，数学问题情境的教学都要遵循以下原则："面向全体学生，从学生原有的认知结构出发，符合学生的认知发展水平"；遵循"跳一跳能摘到果子"的教学思想；突出以"问题引导、自主探索、互动生成"为主旋律的课堂教学模式。

四、数学问题情境教学的方式

在进行数学问题情境教学时，首先，根据需要出示背景材料，再给出拓展延伸问题或整体呈现问题情境（背景材料及由此拓展的延伸问题），并在适当的时候点题。其次，学生根据教师提供的问题情境进行自主探索学习；同时，教师巡视，关注学困生，实行个别辅导，并从学生的解答中收集有效的教学资源，为后续互动中的生成打下良好的基础。具体程序如图 1.1 所示：

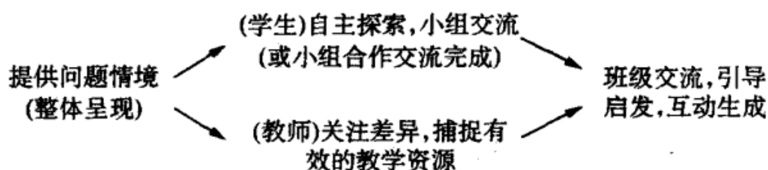


图 1.1

第 3 节　数学问题情境教学案例分析

一、数学问题情境教学要从学生原有的认知基础出发

问题情境教学应从学生原有的认知基础出发，力求使问题情境教学符合最近发展区理论。

（一）数学问题情境教学应从学生熟悉的生活素材出发

例 1　有理数加法的教学

为了让学生了解有理数加法算式来自现实世界，体会学习有理数加法的必要性，并获得有理数加法法则，在有理数加法的问题情

境教学中，教师可先出示一组学生非常熟悉的现实背景问题，随后再给出拓展延伸的探索问题。具体如下：

第一层面 教师提供背景材料让学生利用原有的知识及生活经验解答

背景材料：

(1) 小明在一条东西向的跑道上向东行走，先走了 20 米，又走了 30 米，他现在位于原来位置的哪个方向？与原来位置相距多少米？(铺垫的情境问题)

(2) 小明在一条东西向的跑道上，先走了 20 米，又走了 30 米，他现在位于原来位置的哪个方向？与原来位置相距多少米？

[**情况分析**] 对背景材料中的问题(1)，学生很容易解答。背景材料中的问题(2)，涉及分类讨论，对于刚进入初中的学生来讲，有一定的难度，但在与指明方向的问题(1)的比较中，学生会意识到在问题(2)中小明行走的方向不明确，解决它，应先指明两次运动的方向。通常情况下，学生在解决背景问题(2)时，仍然会借助小学的知识，利用算式 $20+30=50$ 和 $30-20=10$ 来获得答案。由于需要用分类思想才能解决问题(2)，所以学生的解答还有可能不完整，因此在互动中，必须让学生进一步了解如何用分类思想解决问题。以下是问题(2)的完整答案：

① 若第一次向东走 20 米，第二次向东走 30 米，则小明现在位于原来位置的东方，与原来位置相距 50 米；

② 若第一次向西走 20 米，第二次向西走 30 米，则小明现在位于原来位置的西方，与原来位置相距 50 米；

③ 若第一次向西走 20 米，第二次向东走 30 米，则小明现在位于原来位置的东方，与原来位置相距 10 米；

④ 若第一次向东走 20 米，第二次向西走 30 米，则小明现在位于原来位置的西方，与原来位置相距 10 米。

第二层面 点题并引出探索问题

如何利用初中所学的知识解决问题(2)，用不同的算式直接体

现以上四种情况，并获得其计算法则，这是学生面临的新问题，而这个新问题就是本课所要学习的有理数加法（点题）。为了得到有理数加法算式，请同学们先解决从背景问题中拓展延伸出的第一组探索问题：

（1）想一想：可以用什么数学符号来体现运动结果的位置方向？用什么数学概念来体现运动结果的位置与原来位置的距离？

（2）用所学的有理数表示四种情况中不同运动方向的量及其结果。

（3）将四种情况的文字语言翻译成符号语言，即用不同的算式（含结果）直接体现第一层面问题（2）的四种不同结论。

（4）利用数轴展现各个算式的意义。

［**情况分析**］ 学生在独立思考的基础上进行互动，并在互动中明确用有理数表示实际问题时要先规定"＋"、"－"的意义，然后才能用有理数表示实际意义的量；体会运动的"位置方向、位置距离"分别与"符号、绝对值"有着对应关系，为后续了解有理数加法算式的几何意义奠定基础，懂得求两次运动的总结果用加法。若规定向东为正、向西为负，便可写出如下的算式：

① $(+20)+(+30)=+50$；　② $(-20)+(-30)=-50$；

③ $(+20)+(-30)=-10$；　④ $(-20)+(+30)=+10$。

问题（4）的解决，让学生了解到数轴是体现有理数加法的有效工具。为了给后续合情推理有理数加法法则提供一定数量的佐证材料，紧接着提出问题（5）：

（5）模仿问题情境，编造背景题，并用有理数加法算式表达。

第三层面　探索有理数加法法则

为了从获得的有理数加法算式中，继续探索有理数加法法则，请同学们继续解决第二组探索问题：

（1）试一试：根据第二层面问题（4）中的四个算式（及自编题得到的算式）所反映出来的一般规律，尝试着解答下列算式（直接写出答案）：

⑤ (+25)+(+34)；　　　　⑥ (−25)+(−34)；

⑦ (+25)+(−34)；　　　　⑧ (−25)+(+34)。

(2) 对于有理数的加法运算，和的符号怎样确定？和的绝对值如何得到？请在算式①～④中补充其计算过程。想一想，这个过程反映出有理数加法的计算方法与正数加减法之间具有怎样的关系？

(3) 尝试用文字表述上述算式所反应的一般规律。

(4) 想一想，有理数的加法是否还存在其他形式的算式？若有，请赋予背景，得出结果，总结规律。

［**情况分析**］ 通过对算式的观察，学生能发现规律，但却常常停留在"只可意会不能言传"的层面上。从问题(1)的解决，可以判断学生是否已经发现规律。让学生用运算过程来补充呈现有理数的加法运算与正数的加减运算的关系，可使学生从中体会转化思想——将新问题转化成旧问题。若学生能正确回答，则表明学生基本了解法则的内容，在这个基础上让学生用文字表述就比较容易。问题(3)是交流的重点，它的实质是符号语言向文字语言的转化。由于有理数的加法还有特例("互为相反数的两个数相加得零"；"一个数与零相加，仍得这个数")，最后再通过问题(4)的探索，使学生获得完整的法则，并以此考察学生举一反三的迁移能力。

［**点评**］ 本课例从学生熟悉的生活实例出发，以知识与生活经验的接口作为问题情境教学的切入点，通过拓展延伸的探索问题引导学生自主探索学习，提高学生利用所学的知识解决问题的能力，通过"问题情境——建立模型——探寻规律"三个层面的教学，让学生经历知识的形成过程。

(二) 数学问题情境教学应从学生已知的具体数学素材出发

例 2　一次函数性质的教学

为了让学生认识学习一次函数的必要性，激发学生进一步学习的欲望，教师在一次函数性质的问题情境教学中，先出示一道能用学生已学过的知识解决的数学习题，意在承上启下，即通过它复习一次函数图象的画法，明确"一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 图象上的

点(x, y)都满足关系式 $y = kx + b$；满足关系式 $y = kx + b$ 的 x、y 所对应的点(x, y)都在一次函数 $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ 的图象上”。又由它引出拓展延伸的探索问题。具体如下：

第一层面 教师提供学习材料（习题），让学生利用已学的知识解答

学习材料：已知一次函数 $y = 2x + 1$。

(1) 画出这个一次函数的图象；

(2) 已知点$(-1, a)$在这个一次函数的图象上，求 a 的值。你能想出几种方法？

(3) 已知点$(-1, a)$和$\left(\frac{1}{2}, b\right)$在这个一次函数的图象上，试比较 a 和 b 的大小。你能想出几种方法？

［**情况分析**］ 大部分同学都采用直接方法解决问题，即直接求出 a 和 b 的值，再比较大小；也有个别同学想到用间接方法解决问题：即不求 a 和 b 的值，直接利用图象上这两点的位置就可比较这两点的纵坐标的大小。教师肯定学生的解法后提出新的问题。

第二层面 点题并引出探索问题

若没有一次函数图象作支持，我们能否根据一次函数的关系式比较 a 和 b 的大小呢？学习了本课的知识——一次函数的性质（点题），你们就能回答这个问题。请同学们解决由上述习题解答引出的探索问题：

(1) 用文字表述一次函数 $y = 2x + 1$ 图象的变化趋势。

(2) 函数 $y = 2x + 1$ 图象上的“这种变化趋势”怎样用变量 x 与 y 的相互关系来表述？

① 先对自变量 x 取几个值，再求出对应的因变量 y 的值；

② 比较你所取的这些自变量的值的大小关系，再比较与之对应的因变量的值的大小关系，它们之间有什么必然的联系？请写出你的发现；

③ 再换几个数值试一试，看看是否还有这种必然的联系；

④ 请你归纳总结一次函数 $y = 2x + 1$ 中变量 x、y 的变化规律。

(3) 再换一个与 $y = 2x + 1$ 同类型的一次函数(例如 $y = 3x + 2$，$y = x + 4$ 等)，看一看这个一次函数的变量及其图象是否也有类似的规律(称为一次函数的性质)。

(4) 归纳总结：先写出这类函数($k > 0$，$b > 0$ 的一次函数)的一般关系式，再写出它的性质。

[情况分析] 由于有图象作支持，学生都能大致地描述出函数 $y = 2x + 1$ 图象的变化趋势，但用变量之间关系来表述图象的这种变化趋势，并真正体验它的意义，则需要一个过程。为了让学生经历这个过程，针对问题(2)、(3)、(4)，给出了一组环环相扣的小问题，让学生由点到面地进行合情推理，实现由图形语言到符号语言的转化，完成了其中一类一次函数—— $y = kx + b$ ($k > 0$，$b > 0$) 性质的探索。为了直观地让学生确认其正确性，教师还可以借助几何画板进行实验验证。

第三层面 请同学们继续解决第二组探索问题

(1) 其他类型的一次函数是否也有类似的性质，请继续探索；

(2) 对你所探索的各种类型的一次函数的性质进行整合，总结出一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的性质；

(3) 能找到现实生活中的例子来支持一次函数的这个性质吗？若能，请举例说明。

[情况分析] 对于一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，针对 k、b 的不同符号进行分类，可以得到六种。即当 $k > 0$ 或 $k < 0$ 时，分别对应 b 的三种情况($b > 0$，$b = 0$，$b < 0$)。这样的分类，就会出现不同情形分别具有相同性质的现象。由于数学表达具有高度的简洁性，因此，在表述时必须对其六种情况再进行合并整合，使之简洁明了，从而完成对一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的性质的探索。获得结论如下：

① 当 $k > 0$ 时，y 随着 x 的增大而增大；这时函数的图象从左到右上升。

② 当 $k<0$ 时，y 随着 x 的增大而减小；这时函数的图象从左到右下降。

问题(3)让学生体验到一些数学结论都能在实际生活中找到原型，得到合理的解释。从而认识数学与实际生活的紧密联系，体现数学的应用性。

［**点评**］ 本课例从学生已解决的数学问题出发，以图形语言转化为文字语言作为问题情境教学的切入点，通过拓展延伸的探索问题引导学生自主探索学习，经历知识的形成过程，渗透分类思想，培养合情推理的能力。

（三）数学问题情境教学可从简单直观图出发

例 3 圆与圆位置关系代数表达式的教学

为了让学生充分感悟两圆半径、圆心距决定两圆的位置，找出两圆的位置与两圆半径、圆心距之间的关系，教师在探索两圆位置关系的情境问题教学中，先让学生观看两个直观动画，获得决定两圆位置的元素——两圆半径及圆心距，随后再让学生画图，借助图形直观感知两圆的位置与两圆半径、圆心距之间的关系。具体如下：

第一层面 动画感悟

背景材料 1：

图 1.2：两圆的大小不变，两圆做平移运动；

图 1.3：两圆的位置（圆心）固定，两圆轮流发生大小变化。

（观看动画，认真观察两圆位置关系的变化情况）

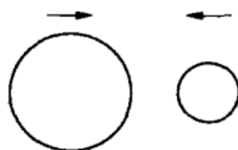


图 1.2



图 1.3

拓展延伸：

(1) 从动画中，你有什么感悟？（图 1.2 中，什么量起变化时，两圆位置关系随之发生变化？图 1.3 中，什么量起变化时，两圆位置

关系随之发生变化?)

(2) 哪些量决定着两圆的位置关系?

[**情况分析**] 由于动画的直观性,学生容易分别从中悟出圆心距及两圆半径的大小决定两圆的位置关系。

第二层面 让学生通过画图,并借助图形探索另一组问题

背景材料 2:

(1) 已知两圆的半径分别为 3 cm 和 5 cm,若圆心距 d 是 8 cm (2 cm、9 cm、1 cm、4 cm),请分别画出图形并确定它们的位置关系;

(2) 再另写一组数据,试一试。

拓展延伸:

(1) 根据所画的两圆位置关系,想一想背景材料 2 中的两圆半径和圆心距具有怎样的数量关系,就能确定两圆相对应的位置关系?

(2) 归纳概括:

① 你能从"试一试"中得到启发,获得利用两圆的半径(R、r)和圆心距(d)之间的数量关系判断两圆位置关系的一般结论吗?

② 反之,由两圆位置关系,你能得到相对应的两圆半径 R、r 与圆心距 d 之间的关系式吗?

③ 请尝试将①、②的结果归纳成如下表格。

两圆的位置关系	数量关系

(3) 尝试论证你所获得的结论。

［**情况分析**］ 再次以直观图形作为探索新知识的起点，通过形数互化，体验数形结合思想，通过从特殊到一般培养学生的归纳概括能力，对于问题(3)的解决，重点放在两圆相交情形的论证。

［**点评**］ 本课例以直观画面作为问题情境教学的切入点，通过引导学生直觉感悟图形中隐含着的本质属性，从而获得两圆半径、圆心距之间的数量关系与两圆位置关系的内在规律，期间渗透数形结合思想，培养学生归纳概括和合情推理的能力。

二、数学问题情境教学要适应学生的思维发展水平

学生的思维在不同的年龄段有着不同的特点，因此问题情境教学应与当前学生的思维发展水平相匹配。若当前学生的思维模式处在经验型为主的抽象思维阶段，问题情境教学中所需要的思维方式则以归纳推理为主；若当前学生的思维模式处在经验型抽象思维向理论型抽象思维发展的阶段，问题情境教学中所需要的思维方式则以类比推理或逻辑推理为主，以便学生跳一跳就能摘到果子，促使学生思维发展的飞跃期提前到来。

（一）数学问题情境教学要体现从特殊到一般的归纳推理

例 4 整式乘法中平方差公式的教学

初二学生的思维通常处在经验型的抽象思维阶段，为了以知识为载体渗透数学思想方法，逐步形成学生新的学习方式，让学生了解乘法公式是多项式乘以多项式公式的特殊情况，学会从特殊到一般的归纳推理方法，在乘法公式的问题情境教学中，可侧重采用由特殊到一般的归纳推理思维方式。

第一层面 温故、点题、解决探索问题

首先，请同学们回忆多项式乘以多项式公式，然后完成一组教师刻意选择的能承上启下的整式乘法计算题及由此拓展的探索问题。［在出示计算题之后，必须向学生说明：通过这组计算题，你们将会发现一类特殊的多项式乘以多项式的简洁计算方法。这就是我们今天所要学习的内容——乘法公式(点题)］具体如下：

背景材料(计算)：

① $(a+b)(c+d)$；　　② $(x+1)(x-2)$；

③ $(x+2)(x-2)$；　　④ $(3x-1)(3x+1)$。

拓展延伸(观察与归纳)：

(1) 观察、比较计算结果的项数，你发现了什么？你能从中猜想出这种特殊的整式乘法的简单计算方法吗？

(2) 用你的猜想直接计算 $(2n+1)(2n-1)$ 和 $(3x+2y)(3x-2y)$。

(3) 试着用式子表达你的猜想，并用语言叙述。

[**情况分析**]　学生可以轻松完成计算题，但解决拓展问题还是有一定的难度。由于受到背景材料的提示，问题(1)的目标指向明确，学生可以独立获得猜想，并能利用获得的猜想解决过渡问题(2)。对于问题(3)，由于是考查学生的归纳推理能力、数学语言和文字语言的表达能力，难度较大，需要在互动中加以完善，并在完善中获得猜想：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ——两数和乘以这两数差公式(平方差公式)。

第二层面　验证、建立新旧知识联系

通过验证并建立新旧知识的联系，让学生了解平方差公式是多项式乘以多项式的一个特例，具体如下：

(1) 验证：用你所学的知识推导两数和乘以这两数差(平方差)公式 $[(a+b)(a-b)=a^2-b^2]$；并想一想：具有什么特征的多项式相乘可用这个公式计算？举几个具有代表性的例子加以说明。

(2) 建立知识间的联系：将平方差公式与多项式乘以多项式的法则相比较，想一想：平方差公式能否看成是多项式乘以多项式法则的特例(即特殊情况)？

(3) 联想类比：赋予公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的几何背景(即根据公式的结构特征，构造平面图形，利用图形的某些量之间的关系来验证这个公式)。

[**情况分析**]　通过验证，让学生明确在条件许可的情况下，必

须从理论上说明猜想的正确性。本题的推理过程虽然简单，但在代数中，学生接触推理论证的例子较少，他们还未真正掌握逻辑推理。因此，在互动中，教师还要再次重申逻辑推理的要点，以培养学生思维的严密性。通过举例，让学生了解公式的适用范围，理解公式中字母的意义；通过新旧知识的比较，让学生了解知识间通过特殊与一般是如何建立联系的，并构成知识网络图；通过联想类比，让学生体验数形结合思想在构造图形方面的应用，了解它的构造思路：借助图形的面积将数转化成形（如图 1.4）。同时利用右图中的任意一个，可以从另一个角度验证平方差公式。

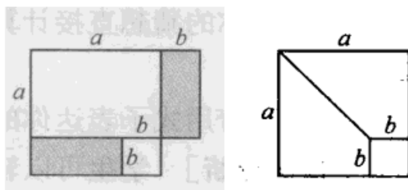


图 1.4

［**点评**］ 本课例从学生现有的发展区出发，以具体材料作为问题情境创设的切入点，架设具体到抽象的桥梁，引导学生发现并探索新知，在发展学生合情推理能力的同时兼顾培养学生的理性思维能力。

（二）数学问题情境教学要体现由一般到特殊的理性思维

例 5 完全平方公式的教学

由于完全平方公式与平方差公式一样都是多项式乘以多项式$[(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn]$的特例，而平方差公式的获得过程采用了合情推理，并建立了平方差公式与多项式乘以多项式的法则之间的内在联系，因此在完全平方公式的问题情境教学中，对于完全平方公式的探索，就可以不再采用合情推理，而在已建立了平方差公式与多项式乘以多项式的法则之间的内在联系基础上，去探索多项式乘以多项式法则的其他特例，培养学生从一般到特殊的理性思维能力。具体如下：

背景材料：

我们知道，平方差公式是多项式乘以多项式法则的特例，即在$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$中，取$m=a$和$n=-b$时，就可以得到平方差公式。今天，我们将继续探索多项式乘以多项式法

则的特例，来获得其他的乘法公式(点题)。

拓展延伸

(1) 类比探索：想一想，$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$ 还有哪些特例？试着用式子表达，并用语言叙述。

(2) 具有什么特征的多项式相乘可利用你获得的特例进行计算？举几个具有代表性的例子说明。

(3) 联想类比：赋予 $(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$ 的特例的几何背景，并借助图形验证该特例。

[**情况分析**] 对于问题(1)，学生可能会写出很多特例，但其中许多特例经过变形和换元可以归结到平方差公式与另一个特例：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ——两数和的平方公式(完全平方公式)[可能还有 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$]，从而完成完全平方公式的探索，并从中体会由一般到特殊的探究方法——采用分类的思想赋予特殊值。

问题(2)考查学生对特例中字母意义的理解。

问题(3)巩固说理过程。

[**点评**] 本课例从学生最近发展区出发，以寻找特例作为问题情境教学的切入点，通过已知与未知之间的联想类比，引导学生探索新知，发展学生的理性思维能力。

(三) 数学问题情境教学要注重类比推理

例 6 圆与圆的位置关系的教学

由于初三学生的思维处在经验型抽象思维向理论型抽象思维发展的阶段，而两圆的位置关系在学习方法上与点(直线)与圆的位置关系相类似，因此，在圆与圆位置关系的问题情境教学中，可通过问题促使学生进行联想与类比学习，提高学生的类比推理能力。具体如下：

背景材料：

(1) 先回忆点(直线)与圆的位置关系、识别方法、特性。

(2) 若在直线与圆的位置关系中，将直线换成圆(即想象将直

线弯曲成圆)，直线与圆的位置关系就变成了圆与圆的位置关系，那么它们的位置关系又将如何呢？

拓展延伸：

(1) 猜想两圆的位置关系，画出图形体现这些位置关系；

(2) 利用你的学具(圆)设计一个实验，验证或修正你的猜想；

(3) 说出选择这些位置关系(分类)的理由(分类标准)；

(4) 借助你的学习经验，尝试给两圆的各种位置关系分别取一个合适的名称。

[**情况分析**] 先由以往获得的数学活动经验及头脑虚拟实验猜测结果，再由实物实验验证结果并为结果取名，整个过程重在培养学生的类比推理能力。互动过程中，重在将学生得到的两圆各种位置关系根据它所体现的特点进行归类。

[**点评**] 本课例从学生的最近发展区出发，温故引新，以知识的生长点作为问题情境创设的切入点，引导学生从类比中获得新知，发展学生的合情推理能力。

(四) 数学问题情境教学应培养学生发现并提出问题的能力

例 7 三角形三边关系的探索

在三角形三边关系的问题情境教学中，为了活跃学生的思维，培养学生的问题意识，先从实验中收集数据、分析数据、获取结论或提出问题，进而解决问题。具体如下：

第一层面 实验操作、提出问题

在学生回忆三角形概念的基础上，让学生亲自动手操作，用预先准备的八根小棒(其中三根小棒长度均为 4 cm，另五根小棒长度分别为 2 cm、3 cm、5 cm、6 cm、7 cm)中三根首尾相接，摆出三角形。

活动要求

(1) 从八根小棒中任意取出三根摆三角形(至少五次以上)；

(2) 记录每次所取三根小棒的长度及实验操作的结果，画出所摆图形的草图；

(3) 根据实验操作所获取的数据和结果,想一想从中能得出什么结论并提出相关的探索问题。

活动过程:先独立完成后小组讨论、汇总,最后班级交流、互动。

[**情况分析**] 该层面创设了一个让学生动手操作的情景,然后通过所设置的开放性问题,让学生经历收集数据、分析数据、获取结论或提出问题的过程,逐步学会透过现象看本质。

学生在深入思考的基础上进行班级互动,在互动中达成以下共识:

(1) 结论:实验操作结果出现以下两种情况:不能构成三角形和能构成三角形,所以并不是任意的三条线段都能组成一个三角形;

(2) 问题:怎样判断三条线段是否能构成一个三角形?(或另一个等价的问题:已知两条线段,第三条线段怎样选择,才能构成一个三角形?)

第二层面 利用数据、探求数学结论

问题(1):你将采取什么方法、从哪里入手解决前面提出的探索问题?(在解决了问题(1)的基础上提出问题(2))

问题(2):从摆三角形时记录的数据及结果入手,观察三条线段的长度大小如何决定这三条线段是否构成三角形,并写出猜想。

问题(3):如果略去三条线段摆三角形的背景,换一个角度阐述该结论,你能得出有关三角形三边关系的数学结论吗?

[**情况分析**] 该层面通过相互关联的问题串引导学生探索,这对于首次接触"由形转化成数进行解决的问题"的学生是非常必要的。有了教师的问题引导,就可以减少学生盲目的尝试,有效地利用课堂时间,从而避免牧羊式的教学,体现新课程的教师角色。

对于问题(1),学生借助前面实验所获得的经验,再经过讨论、交流,生生、师生互动不难得出,三条线段能否构成一个三角形是由这三条线段的长度决定的,所以解决前面提出的探索问题,实际就是解决问题:"三条线段的长度满足什么关系时,这三条线段才能构

成一个三角形?”而解决这个问题应该从摆三角形时记录的数据及结果入手。这样,形的问题就转化成数的问题来研究。

对于问题(2),学生先凭直觉观察思维,进而计算,再用实验(叠放比较)进行操作验证,最后通过互动获得猜想:“任意两条线段的长度之和大于第三条线段的长度,这三条线段可构成一个三角形。”否则,不能构成一个三角形。

对于问题(3),其目的是让学生经历数学化的过程,最后获得数学结论:三角形的任何两边之和大于第三边。

第三层面　说理、拓展

探索问题:

(1) 将文字语言(三角形的任何两边之和大于第三边)转化成图形语言及符号语言,然后变换角度思维,能利用前面学过的线段基本性质进行说理吗?

(2) 是否可以将这个数学结论延伸得出其他结论?

[**情况分析**]　通过该层面,让学生在实验操作、感知确认的基础上进行理性的思维,以期发展学生的逻辑推理能力。

对于问题(1),学生可以通过将联结两点的线看成有两种:线段和折线,从而利用前面学过的事实:“两点之间,线段最短”进行说理。

对于问题(2),学生对三角形三边的关系进行变换后,便可筛选出它的两个等价的命题:“三角形的任意两边之差小于第三边”和“三角形的一边大于其他两边之差的绝对值且小于其他两边之和”。

[**点评**]　本课例从学生的生活经验出发,以直观感知、操作确认作为问题情境创设的切入点,着重培养学生的问题意识与解决问题的能力。

第2章 充分发挥教材中“例、习题”的效用

第1节　有效使用教材中“例、习题”的必要性

一、学生学习的需要

当前，以培养学生的创新精神、科学精神和实践能力为基本价值追求的新型教学模式在中小学课程改革中引起广泛关注，并越来越得到社会的普遍认同。《义务教育数学课程标准》中明确指出：“学生的数学学习内容应当是现实的、有意义的、富有挑战性的，这些内容要有利于学生主动地进行观察、实验、猜测、验证、推理与交流等数学活动。”以课改新理念为编写依据的中、小学数学新教材，在例题与练习题的编写方面比旧的教材有了相当大的突破，出现了许多背景新颖，富有时代气息，有利于学生开展数学活动，具有很好教育功能的题目。但目前许多地方仍存在题海泛滥的弊病，经常撇开教材去操练四处流传的各种“新”、“旧”练习题，往往事倍功半，收效甚微，学生学习负担繁重，严重挫伤了自尊心和自信心。因此，合理有效地使用教材中的例、习题，有利于摒弃题海战术，激发学生学习数学的兴趣，培养他们的创新意识及实践应用能力，促使他们全面、持续、和谐地发展。

二、教师提高的需要

叶圣陶先生说:“教材无非是个例子,教师应凭借这些例子教学生掌握这个工具,形成良好的学习习惯,达到不需要教的目的。”这句话深刻阐明了“教师”、“教材”、“学生”三者之间的辩证关系。教材是师生对话的文本,是学生学习活动所凭借的知识、方法与依据,作为教师应努力钻研教材,吃透教材,掌握教材的编写意图,分清教材的重点、难点和关键,掌握教材的科学性、系统性和思想性,促使学生养成认真阅读数学教科书的习惯。教师在教学活动中,通过解读与分析教材中的例、习题,深入挖掘蕴含在它们之中丰富的教学价值与教育效能,并进行归纳、渗透与总结,能有效地提高教学理论和数学教学水平,促进自己业务素质的发展。

三、学校发展的需要

《义务教育数学课程标准》中的内容是学习、应用的最低标准,教师在进行学科教学中应整合教学资源,创造性地开发课程练习与习题设置。要结合实际,充分挖掘学校资源,倡导教材使用“校本化”。通过教材中的例、习题与校本课程的结合,促进学校文化的发展,形成校本教研的开拓创新氛围;通过个人反思、同伴交流与专家引领,使校园充满着生动、热烈、有效的教学教研气氛,从而提高学校的办学效益。

四、教材建设的需要

课改以后的数学新教材的面孔变得“亲切可爱”,其中除有严谨、系统的双基知识外,还不乏有现实生活中美丽精致的画面、有趣的阅读材料及自然、社会与其他学科中的生动素材。教材中设置许多具有挑战性的问题情境,给学生提供探索与交流的空间。新教材编写者不再躲在幕后,而是经常深入课改第一线,为教师诠释教材编写的理念、意图与结构,与教材使用者面对面互动,倾听使用者的

心声，交流创造性使用课改新教材的经验，并及时采纳广大教师、教研员的合理化建议，对教材中的某些结构与内容作修订与改动。但由于我国地域广大，学生发展的差异与各地区发展的不平衡性，使得教材在满足学生的不同需求方面尚有差距。一些教材例、习题数量偏少，不利于学生牢固掌握学科知识，也给教师的教学造成了一定的困难。为促进新教材建设，使全体学生都能得到相应的发展，教师应充分发挥创造性，根据所在地区、学校、班级的具体情况，对教材中一些例、习题进行改组与拓展，并进行案例研究，及时对教材提出修改意见，使得新教材的例、习题编写更为合理与完善。

第2节　如何充分发挥教材中“例、习题”的效用

一、基本方法

（一）“例、习题”的改组与拓展

教材中的例、习题是编写者精心设计的典范，其目的是通过例题的讲解、习题的训练，帮助学生很好地掌握知识、激发思维与培养能力。为充分发挥教材中例、习题的上述效用，教师在数学教学中，要根据本地具体情况，抓住题目的特征，对教材中的例、习题进行适当的取舍、改组与拓展，这样不仅能沟通知识间的内在联系，使学生的思维活动始终处于一种由浅入深，由表及里的“动态”进程之中，还能充分调动学生学习的积极性与主动性，培养他们思维的灵活性与广阔性，从而有效地提高教学质量。

例1　某教材在给出“深证股票指数某日的走势图”后，要求学生回答：(1)当天11点的指数是多少？(2)当天10点和11点的指数哪一个高？(3)用语言描述当天深证指数的变化情况。本题对于没有炒过股票的教师与大多数学生来说是陌生的，尤其农村学校的学

生更是“找不到感觉”。因此可以根据实际情形作适当替换，有的老师把它改编成当地某日气温变化曲线图，或改编成本校历年初中招生人数折线图等，既贴近学生的生活实际，又打破了学科界限，增长了学生的知识面。

例 2 某教材原习题：一条隧道的截面如图 2.1 所示，它的上部是一个半圆，下部是一个矩形，矩形的一边长为 2.5 m。

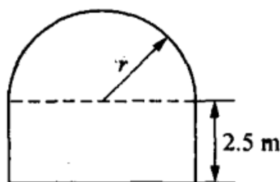


图 2.1

(1) 求隧道截面的面积 $S(\mathrm{m}^2)$ 关于上部半圆半径 $r(\mathrm{m})$ 的函数关系式；

(2) 当上部半圆半径为 2 m 时，求截面面积（结果精确到 0.1 m^2）。

改编后的练习：一条隧道的截面如图 2.2 所示，它的上部是一个以 AD 为直径的半圆 O，下部是一个矩形 $ABCD$。

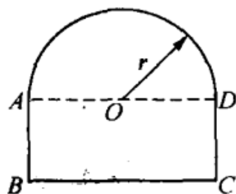


图 2.2

(1) 当 $AD=4$ 米时，求隧道截面上部半圆 O 的面积；

(2) 已知矩形 $ABCD$ 相邻两边之和为 8 米，半圆 O 的半径为 r 米。

① 求隧道截面的面积 S(米^2)关于半径 r(米)的函数关系式（不要求写出 r 的取值范围）；

② 若 2 米 $\leqslant CD \leqslant$ 3 米，利用函数图象求隧道截面的面积 S 的最大值（π 取 3.14，结果精确到 0.1 米^2）。

练习简要答案：(1) 2π 米^2。 (2) ① $S=\left(\frac{1}{2}\pi-4\right)r^2+16r$；② 先求得 $2.5\leqslant r\leqslant 3$，再求得函数图象为开口向下、对称轴 $r\approx 3.3$ 的抛物线的一段，由函数图象性质知当 $r=3$ 时，S 的最大值约为 26.1 米^2。

本练习保持原教材习题的结构不变，设置了新的问题情景，在第(2)小题中，增加了隧道截面下部矩形两邻边长度之间关系的条件。改编后的练习含有的基础知识（例如整式运算、解不等式组等）

更全面，渗透的数学思想（例如数形结合、函数等思想）更丰富，涉及到的数学方法与技能（例如配方法、利用计算器作近似计算、发展数感等）更广泛。通过练习，能有效提高学生利用图象研讨二次函数有关性质以及解决实际问题等能力。

例 3 某教材原习题：

1. 在图 2.3 的方格纸中，画出$\triangle ABC$绕点C逆时针旋转 90°后的图形。

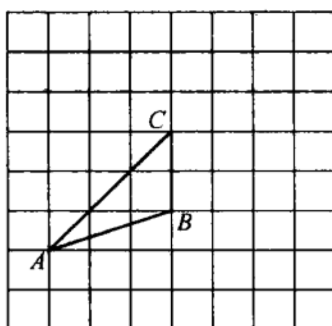


图 2.3

2. 如图 2.4，在正方形网格上有$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$，这两个三角形相似吗？如果相似，求出$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$的面积比。

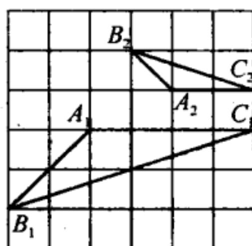


图 2.4

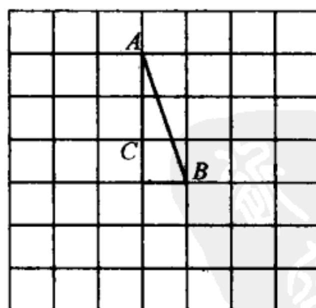


图 2.5

改编后的练习 1：在图 2.5 的方格纸中有一个 Rt$\triangle ABC$（A、B、C三点均为格点），$\angle C = 90°$。

(1) 请你画出将 Rt$\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90°后所得到的 Rt$\triangle A'B'C$,其中 A、B 的对应点分别是 A'、B'(不必写画法);

(2) 设(1)中 AB 的延长线与 $A'B'$ 相交于点 D,方格纸中每一个小正方形的边长为 1,试求 BD 的长(精确到 0.1)。

练习 1 简要答案:(1) 图略。 (2) $BD \approx 0.6$。

改编后的练习 2:如图,在一个横截面为 Rt$\triangle ABC$ 的物体中,$\angle ACB=90°$, $\angle CAB=30°$, $BC=1$ 米。工人师傅把此物体搬到墙边,先将 AB 边放在地面(直线 l)上,再按顺时针方向绕点 B 旋转到$\triangle A_1BC_1$ 的位置(BC_1 在 l 上),最后沿 BC_1 的方向平移到$\triangle A_2B_2C_2$ 的位置,其平移的距离为线段 AC 的长度(此时 A_2C_2 恰好靠在墙边)。

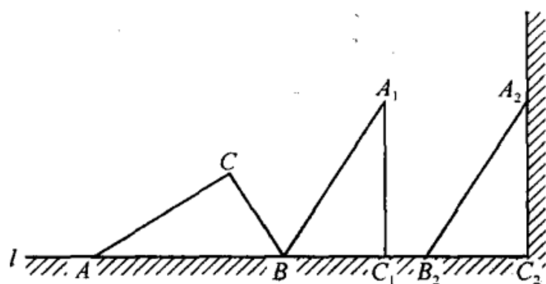


图 2.6

(1) 请直接写出 AB、AC 的长;

(2) 画出在搬动此物的整个过程点 A 所经过的路径,并求出该路径的长度(精确到 0.1 米)。

练习 2 简要答案:(1) $AB = 2$ 米,$AC = \sqrt{3}$ 米。 (2) 画图略,点 A 所经过的路径长约为 5.9 米。

初中数学课改对图形变换的要求较高,其中“平移”、“旋转变换”是以往旧教材所没有涉及到的。方格纸具有很好的数学特性,恰当运用它可以帮助学生掌握较为抽象的几何变换,探索图形性质,感悟数形结合思想,因此在课改新教材中方格纸的运用较为广泛。改编后的练习 1 以上面两道教材习题为蓝本进行重组与拓展,

先让学生动手操作，将画图与变换相结合，再让学生利用旋转、相似变换的知识进行恰当的推理运算，充分发挥了方格纸的功能；练习2融合了“旋转”、“平移”、“弧长的计算”等知识，引导学生关注生活中的数学，关注身边的数学，促进学生形成学数学、用数学、做数学的意识。

例4 某教材原习题：如图2.7，AB 是⊙O 的直径，$\angle B = 45°$，$AC = AB$。AC 是⊙O 的切线吗？为什么？

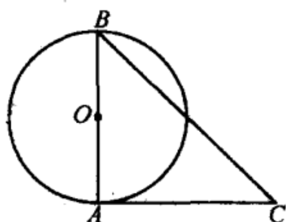


图2.7

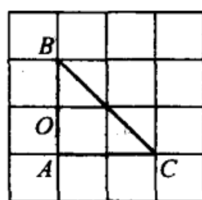


图2.8

改编后的练习：如图2.8，正方形网格中，小正方形边长为1个单位，点 A、B、C、O 分别在格点上。

(1) AC 是以 AB 为直径的⊙O 的切线吗？为什么？

(2) 试判断以 A 为圆心，半径分别为1、$\sqrt{2}$、2的圆与直线 BC 的位置关系。

练习简要答案：(1) 是，理由略。 (2) 相离、相切、相交。

本练习更新了原教材习题的背景，将几何图形置于网格图中，并增添了有关判断直线与圆的位置关系、应用勾股定理计算等内容，渗透了数形结合思想，对于提高学生的综合解题能力大有帮助。

(二) “例、习题”的分层要求

新课标强调让“不同的人在数学上得到不同的发展”，传统的“一刀切”、“齐步走”教学要求已不符合课改的理念。因此，教师要及时了解并尊重学生的个体差异，满足多样化的学习需要，有效地实施有差异的教学，努力使每一个学生都能得到成功的体验；要鼓励与提倡解决问题策略的多样化，尊重学生在解决问题过程中所表

现的不同水平，对教材中部分难度较大的题目进行分层次要求。

例 5 某教材"实践与探索"中的问题：要用 20 张白卡纸做长方体的包装盒，准备把这些白卡纸分成两部分，一部分做侧面，另一部分做底面，已知每张白卡纸可以做侧面 2 个，或者做底面 3 个。如果 1 个侧面和 2 个底面可以做成一个包装盒，那么该如何分法，能使做成的侧面和底面正好配套？请你设计一种分法。想一想，如果可以将一张白卡纸套裁出一个侧面和一个底面，那么又怎样分这些白卡纸，才能既使做出的侧面和底面配套，又能充分地利用白卡纸？

本题叙述冗长，让学习基础较差的学生难以理解题意，无从下手；同时，解答过程中方程组的解为分数，难度较大。为解决上述矛盾，教师教学时可分为三个层次的要求：

第一层次（低层次）：让学生动手实践折糊包装盒，体验、理解"配套"的含义。

第二层次（中层次）：原题先改为"要用 21 张白卡纸做长方体的包装盒，……使做成的侧面和底面正好配套？"（答案：9 张做侧面，12 张做底面，计算结果答案恰好为整数）

第三层次（高层次）：让学有余力的学生完成教材的原题。（答案：若白卡纸不套裁，则最多能做成 16 个包装盒；若可套裁，用 8 张做侧面，11 张做底面，另一张套裁出 1 个侧面和 1 个底面，则共有侧面 17 个，底面 34 个，正好配成 17 个包装盒）

例 6 某教材原习题：有若干张边长为 a 的正方形硬纸卡片，你能拼出一个新的正方形吗？请你用不同的方法表示拼出的新正方形的面积，从不同的表示方法中，你能发现什么？

改编后的练习：用 n 张边长为 a 的正方形硬纸卡片，拼成一个新的正方形。

(1) 则 n 可以为________（写出 3 个值即可）；

(2) 当 $n=9$ 时，拼成的新正方形的边长为________，面积为________；

(3) 若用 n 张这种卡片拼成一个新的正方形的边长为 ka（k 为

大于 1 的正整数)，请你用不同的方法表示拼出的新正方形的面积，从不同的表示方法中，探求 n 与 k 的关系。

练习简要答案：(1) 例如：4、9、16。 (2) $3a$，$9a^2$。 (3) k^2a^2 与 na^2，$n=k^2$。

学生理解原教材习题有一定困难，改编后的练习分成 3 个小题，入手易，难度呈递进趋势，体现了分层次教学的理念。第 3 小题可以让学生通过观察、归纳等获得数学规律，从而提高合情推理能力。

例 7 某教材原习题：如图 2.9，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，P 为 DC 上的一点。设 $DP=x$，求 $\triangle APD$ 的面积 y 关于 x 的函数关系式，并画出这个函数的图象。

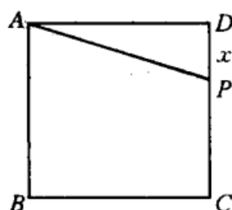


图 2.9

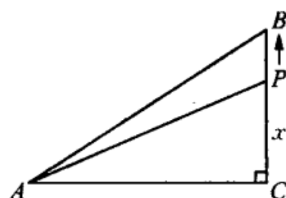


图 2.10

改编后的练习：如图 2.10，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=2$，BC 的长为常数，点 P 从起点 C 出发，沿 CB 向终点 B 运动，设点 P 所走过路程 CP 的长为 x，$\triangle APB$ 的面积为 y，则下列图象能大致反映 y 与 x 之间函数关系的是(　　)。

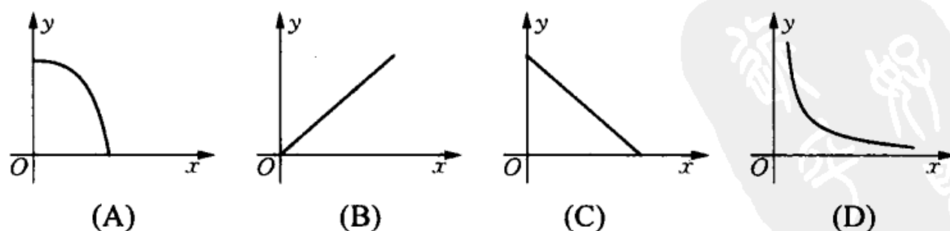


图 2.11

练习答案：选 C。

本练习对教材原习题的结构稍作改变，将原条件中的“正方形”改为“直角三角形”，将结论中“直角三角形”面积改为“斜三角形”面积，并设直角边 BC 的长度为常数，进而转换题型，把解答题改编为选择题。四个选项的设计颇具匠心，包含了学生对该问题的不同理解过程，做这样的练习能反映不同层次学生对问题的真正理解程度，较好地培养他们的函数、运动变化观点，空间观念与数学推理能力。

（三）“例、习题”潜在价值的挖掘

教材中的例、习题往往蕴含着一些“奥秘”，这些“奥秘”有的是学生对所学知识拓展引伸的关键，有的是丰富的数学思想。深入挖掘课本中例、习题的潜在价值，不仅可以把彼此孤立的知识串联成线，前后贯通，使学生解一题而明一路，而且可以优化学生的思维品质，有效地提高他们分析问题、解决问题和探索创新的能力。

例 8　在进行“二次函数的应用复习”时，可把教材中的例、习题改编成“问题串”，将所学知识引伸拓宽。

某教材原例题：某商店将每件进价为 8 元的某种商品按每件 10 元出售，一天可销出约 100 件。该店想通过降低售价、增加销售量的办法来提高利润。经过市场调查，发现这种商品单价每降低 0.1 元，其销售量可增加约 10 件。将这种商品的售价降低多少时，能使销售利润最大？

一位教师改编后的练习：某商店将进价为每件 40 元的某种商品按每件 50 元出售，一天可销出 500 件。他想采用提高售价的办法来增加利润。经试验发现，这种商品每件每提价 1 元，每天的销售量就会减少 20 件。

（1）① 如果每件提价 3 元，那么每天可盈利________元；

② 每天所得的利润 y（元）与每件提价 x（元）之间的函数关系式可以表示为________；

（2）每件提价为多少元，才能使一天的利润最大？

（3）现要保证每天盈利 6000 元，同时又要使顾客得实惠，那么

每件应提价多少元？相应的销售量是多少？

(4) 小明说："当一天的利润最大时，这天的销售额(销售总收入)也最大。"你认为对吗？请说明理由。

练习简要答案：(1) ① 5720 元。 ② $y=-20x^2+300x+5000$。 (2) 7.5 元。 (3) 5 元，400 件。 (4) 不对，理由略。

以上设计秉承教材原例题的基本思想内容，脉络清楚，有利于学生将实际问题转化为数学模型，提高他们应用数学知识解决实际问题的能力。

另一位农村中学教师改编后的练习：我校果树园有 100 棵桔子树，每一棵树平均结 600 个桔子。现准备多种一些桔子树以提高产量，但是如果多种树，那么树之间的距离和每一棵树所接受的阳光就会减少。根据经验估计，每多种一棵树，平均每棵树大约会少结 5 个桔子。问增种多少棵桔子树时，总产量最大？最大的总产量约是多少？(答案：10 棵，60 500 个)

教育心理学家奥苏伯尔说过："影响学生学习的最重要因素是学生已经知道了什么，应根据学生原有知识状况进行教学。"该教师把乡村学生熟知的知识编成练习，让学生在课堂上体验生活，在生活中学习数学。

随着新课程标准的实施，教材中出现多种多样的操作、实践探索题，其中不乏对图形的变化进行探索的题型。在平时教学中，教师要适时地引导学生对此类问题进行探索，发展学生的空间观念。

例 9 某教材原习题：如图 2.12，以$\triangle ABC$的边 AB、AC 为边向形外分别作等边$\triangle ABD$和等边$\triangle ACE$，连结 CD、BE。求证：$CD=BE$。



图 2.12

增补后的练习(问题串)：

问题 1：以点 C 为旋转中心，旋转$\triangle ACE$，使点 E 落在 BC 的延长线上，如图 2.13(a)，$CD=BE$ 是否成立？

问题 2：以点 C 为旋转中心，继续旋转

$\triangle ACE$,使点 A 在 BC 的延长线上,如图 2.13(b),$CD = BE$ 是否成立?

问题 3:以点 C 为旋转中心,再次旋转$\triangle ACE$,使点 A 与点 D 在直线 BC 的两侧,如图 2.13(c),$CD = BE$ 是否成立?

问题 4:把原习题中的向外作等边三角形改为向内作等边三角形,如图 2.13(d),那么 $CD = BE$ 是否仍然成立?

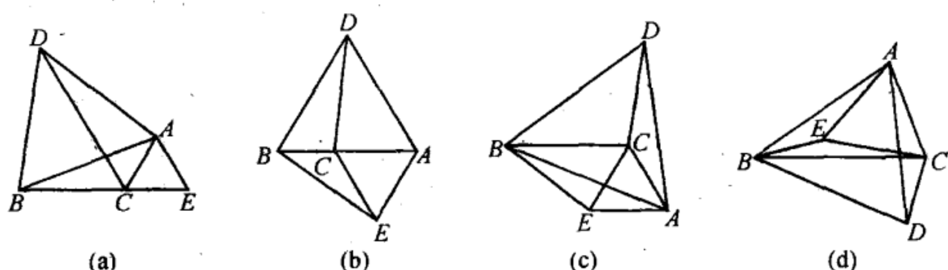


图 2.13

从上述改编拓展的问题串可知:以 C 为旋转中心,把$\triangle ACE$ 旋转任意角度,都能证得 $\triangle ABE \cong \triangle ADC$,从而得到 $CD = BE$。本题整个图形的变化过程可由几何画板辅助完成,动静相承,直观明了,学生做了该练习后能激发兴趣,开阔视野,在不断辨析中加深认识。

例 10 某教材原习题:

1. 已知 y 是 x 的反比例函数,且当 $x = 3$ 时,$y = 8$。

(1) 求 y 和 x 的函数关系式;

(2) 当 $x = 2\frac{2}{3}$ 时,求 y 的值;

(3) 当 x 取何值时,$y = \frac{3}{2}$?

2. 设$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r,$\triangle ABC$ 的周长为 l,求$\triangle ABC$ 的面积 S。

改编后的练习:如图 2.14,在直角坐标系中,O 为原点,$A(4, 12)$为双曲线 $y = \frac{k}{x}\ (x > 0)$ 上的一点。

(1) 求 k 的值；

(2) 过双曲线上的点 P 作 $PB \perp x$ 轴于 B，连结 OP，若 Rt△OPB 两直角边的比值为 $\frac{1}{4}$，试求点 P 的坐标；

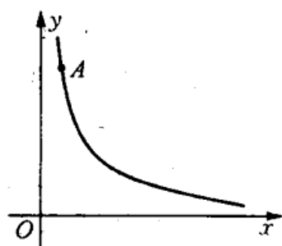


图 2.14

(3) 分别过双曲线上的两点 P_1、P_2，作 $P_1B_1 \perp x$ 轴于 B_1，$P_2B_2 \perp x$ 轴于 B_2，连结 OP_1、OP_2，设 Rt△OP_1B_1、Rt△OP_2B_2 的周长分别为 l_1、l_2，内切圆的半径分别为 r_1、r_2，若 $\frac{l_1}{l_2}=2$，试求$\frac{r_1}{r_2}$的值。

练习简要答案：(1) $k=48$。(2)$P(2\sqrt{3},8\sqrt{3})$或$(8\sqrt{3},2\sqrt{3})$。(3) 可求得 $S_{Rt\triangle OP_1B_1}=S_{Rt\triangle OP_2B_2}=24$，由$\frac{1}{2}l_1 \cdot r_1=\frac{1}{2}l_2 \cdot r_2$，得$\frac{l_1}{l_2}=\frac{r_2}{r_1}=2$，则$\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{2}$。

以两道教材习题为原型，借助其他条件或数学思想方法(如反比例函数性质、比例性质，方程思想、分类思想，面积法等)，将一些知识点串联或并联起来，改编成面貌一新的练习。本练习蕴含的知识点自然融合，梯度明显。同时，第(3)小题中利用等积法得出的三角形内切圆半径与周长关系的重要知识，在高中立体几何中四面体的内切球也具有类似的重要性质，这对做好初、高中数学学习衔接颇有好处。

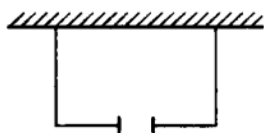
例 11 某教材原习题：学校准备在图书馆后面的场地边建一个面积为 50 平方米的长方形自行车棚，一边利用图书馆的后墙，并利用已有总长为 25 米的铁围栏，请你设计，如何搭建较合适？

原题是一道实际应用题，蕴涵了方程与函数等建模思想，从题目的条件、结论、实际意义和设计方案等方面入手，可作以下的探讨：

改编后的练习：

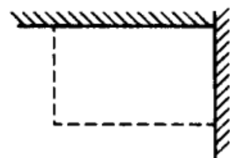
练习 1：如图 2.15 所示，要建一个面积为 130 m^2 的仓库，仓库

的一边靠墙(墙长 16 m),在与墙平行的一边开一道 1 m 宽的门,现有能围成 32 m 长的木板,求仓库的长和宽。


图 2.15

练习简要答案:13 m, 10 m。

练习 2:如图 2.16,用长为 18 m 的篱笆(虚线部分),两面靠墙围成矩形的苗圃。


图 2.16

(1) 设矩形的一边为 x(m),面积为 y(m^2),求 y 关于 x 的函数关系式,并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 当 x 为何值时,所围苗圃的面积最大?最大面积是多少?

练习简要答案:(1) $y = x(18 - x) = -x^2 + 18x$,自变量 x 的取值范围是 $0 < x < 18$。(2) 当 $x = 9$ 时,苗圃的最大面积是 81 m^2。

练习 3:如图 2.17,有长为 24 米的篱笆,一面利用墙(墙的最大可用长度 a 为 13 米),围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃,设花圃的宽 AB 为 x(米),面积为 S(米²)。

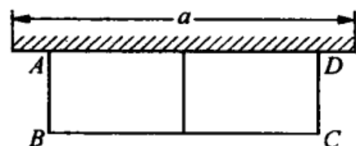


图 2.17

(1) 求 S 与 x 的函数关系式;

(2) 如果要围成面积为 45 米² 的花圃,AB 的长是多少米?

(3) 能围成面积比 45 米² 更大的花圃吗?如果能,请求出最大面积,并说明围法;如果不能,请说明理由。

练习简要答案:(1) $S = -3x^2 + 24x$。(2) 5 米。(3) 能,$S = -3x^2 + 24x = -3(x - 4)^2 + 48$,当 $x = 4$ 时,最大面积为 48 米²。

练习 4:如图 2.18,等腰梯形花圃 $ABCD$ 的底边 AD 靠墙,另三边用长为 40 米的铁栏杆围成,设该花圃的腰 AB 的长为 x 米。

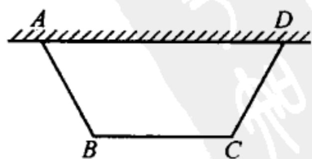


图 2.18

(1) 请求出底边 BC 的长(用含 x 的代数式表示)。

(2) 若 $\angle BAD = 60°$,该花圃的面积为 S 米^2。

① 求 S 与 x 之间的函数关系式并写出自变量 x 的取值范围;

② 当 x 取何值时,$S=93\sqrt{3}$?

③ 如果墙长为 24 米,试问 S 有最大值还是最小值?这个值是多少?

练习简要答案:(1) $BC = (40 - 2x)$ 米。(2) ① $S = -\frac{3}{4}\sqrt{3}x^2 + 20\sqrt{3}x$ $(0 < x < 20)$; ② 当 $x = 6$ 时,$S = 93\sqrt{3}$; ③ 当 $x = 16$ 时,S 取得最大值 $128\sqrt{3}$。

二、教学案例剖析

(一) 课题:矩形的性质(某出版社八年级数学实验教材)

(二) 执教者:曾××(特级教师)

(三) 情况简介:2006 年 11 月,该教师参加泉州市教育局举办的为时一周的“特级教师讲学团活动”。该活动每日的形式为:上午特级教师与该市一所农村中、小学的教师同上一节课,课后进行研讨;下午特级教师举办该学科教学教研讲座。

(四) 施教经过:该教师接受教学任务后,认真学习《数学课程标准》、分析教材后,认为本节课应让学生以直观感知与操作确认为基础,通过适当的类比迁移、数学说理,分析矩形与平行四边形的联系与区别,揭示矩形的概念及其性质。进而通过对例题、练习题(由教材中的例、习题重组和改编而成)的分析与解答,让学生学会运用已得到的矩形性质解决简单的推理与计算问题。

教学目标为:

1. 知识目标 掌握矩形的概念与有关性质,并会利用这些知识进行简单的推理与计算。

2. 能力目标 在了解矩形与平行四边形之间的关系,掌握、运用矩形性质的过程中,渗透数形结合、化归与方程思想,进一步提高

学生分析问题与解决问题的能力。

3. 情感目标　通过动手操作、观察比较、合作交流等活动，激发学生的学习兴趣，让学生增强学习信心，体验探索与创造的快乐。

教学重点为：

1. 理解矩形概念；2. 掌握、运用矩形的性质。

教学难点为：

1. 了解矩形与平行四边形的联系与区别。

2. 运用矩形的性质进行简单的推理与计算。

教学过程为：

A. 复习引入

1. 实物演示：展示平行四边形活动木框，如图 2.19(a)。

问题：它具有什么性质？

（复习平行四边形的有关性质）

2. 推动平行四边形活动木框上边的点 D，成为图 2.19(b)。

问题：你发现了什么？

（木框四个内角大小发生变动，但仍保持平行四边形形状；在推动木框过程中，当一个内角变为直角时，木框形状为特殊的平行四边形，即为小学已学过的长方形，现称为矩形）

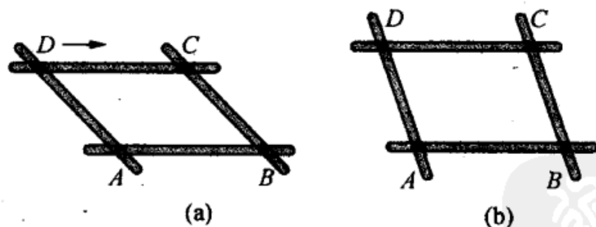


图 2.19

B. 探究新知

1. 矩形与平行四边形的联系（由上面教学过程知：有一个角是直角的平行四边形是矩形）

2. 矩形的性质

(1) 矩形既然为特殊的平行四边形，则它具有平行四边形的所

有性质。

(2) 问题:矩形除了上述的性质外,本身还有什么独有的性质呢?

① 它是否为轴对称图形?

动手操作(学生用课本后面方格纸画出并剪下矩形后折叠,发现它是轴对称图形,有两条对称轴,即两条分别通过一组对边中点的直线)

(学生操作,教师演示)

② 通过折叠得到矩形的另两个独有性质:四个角是直角;对角线相等。

(师生再通过推理论证上述矩形的独有性质)

(3) 总结出矩形所有性质。

3. 矩形性质的应用

(1) 例题:(课本例 1、练习 1 的改编题)如图 2.20,在矩形 $ABCD$ 中,AC 与 BD 相交于 O。

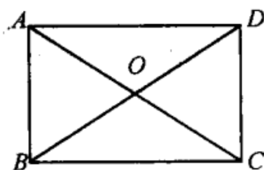


图 2.20

① 在图中找出相等的线段与相等的角;

② 若$\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle OCD$ 和$\triangle AOD$ 四个小三角形的周长之和为 86 cm,AC 的长为 13 cm,试求矩形的周长。

(先让学生独立探索,再教师引导,生生、师生合作交流)

(附:原教材例、习题)

(i) 课本例 1:如图 2.21,矩形 $ABCD$ 被两条对角线分成四个小三角形,如果四个小三角形的周长的和为 86 cm,对角线的长为 13 cm,那么矩形的周长是多少?

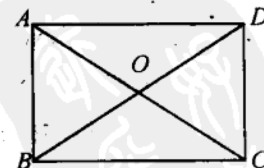


图 2.21

(ii) 课本练习 1:如图 2.21,在矩形 $ABCD$ 中,找出相等的线段与相等的角。

(2) 练习:(课本例 2 的改编题)如图 2.22,在矩形 $ABCD$ 中,两邻边 AB、BC 之比为 3 : 4,矩形的周长为 28。①求 AC 的长;②作 $BE \perp AC$ 于 E,试求 BE 的长。

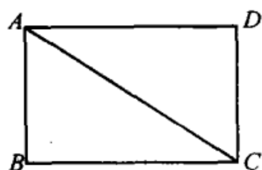


图 2.22

(先让学生独立探索,再教师引导,生生、师生合作交流)

(附:原教材例题)

课本例 2:如图 2.23,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=3$,$BC=4$,$BE \perp AC$ 于 E。试求出 BE 的长。

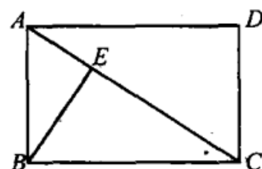


图 2.23

C. 课堂小结

1. 矩形是如何从平行四边形演变而来的?

四边形、平形四边形、矩形的从属关系:

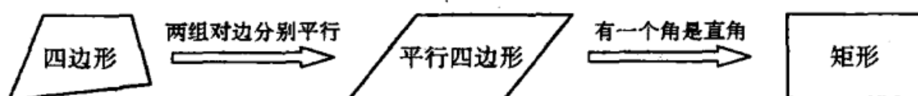


图 2.24

2. 矩形的性质有哪些?

①既是中心对称图形,又是轴对称图形;②两组对边平行且相等;③四个角都为直角;④对角线相等且互相平分。

(先让学生研讨交流,尔后师生一起归纳小结)

3. 矩形性质的应用。

D. 布置作业

1. (课本练习 1)如图 2.25,在矩形 $ABCD$ 中,E 是边 AD 上的一点,试说明$\triangle BCE$ 的面积与矩形 $ABCD$ 的面积之间的关系。

2. (课本习题 16 第 1 题)如图 2.26,已知矩形 $ABCD$ 的一条对角线 AC 长 8 cm,两条对角线的一个交角$\angle AOB=60°$,求这个矩形的周长。(精确到 0.1 cm)

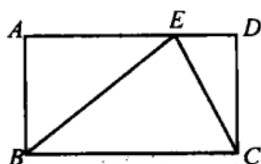


图 2.25

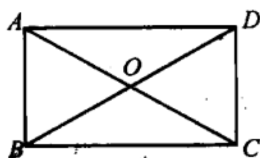


图 2.26

3. （选作题）

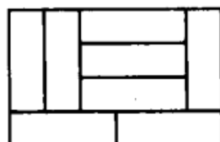


图 2.27

如图 2.27，用 8 块相同的小矩形地砖拼成一个大矩形，若小矩形地砖两邻边之差为 30 cm，试求大矩形的周长。

（五）课后反馈：经研讨认为，在本课教学中，执教者能注意强化对图形变换的理解，把矩形性质的形成、发展、应用的过程展现在学生面前，让学生通过动手实践、理性思考获得新知，给学生提供探索与交流的空间，从而培养学生提出问题、探究问题和解决问题的能力。同时，大家还指出本课在处理教材的例、习题上较为突出的优点，可为其他老师借鉴：

在施教过程中，执教者能努力体现《课标》要求，注意对教材的例、习题进行重组与拓展，以更好发挥实验教材的使用效能。例如，将本节教材中的一道例题与一道练习题改编成该课例题，该例题降低了教材原例题的台阶，减少了学生应用新知识所遇到的困难，既注意体现教材编写者的意图，又顾及学生的学习现状；将本节教材中的另一道例题改编成课堂练习题更是独具匠心，该练习题除保留教材原例题的风貌外，还恰到好处地增添一些能渗透方程思想与培养作图技能的内容，且由学生动手，起到较好的教学效果。整节课精选的例题、练习、作业题数量适宜，作业中有两道是课本中的基本练习题，一道是选作题（内中蕴含着数形结合、方程等思想），可供学有余力的学生解答。执教者在保证基本要求的前提下，实施了分层教学，从而使不同的学生获得不同的体验，得到不同的发展。

第3章 指导学生学会阅读数学课本

第1节 指导阅读、研读数学文本

一、指导“比较地学，联系地学”

类比与联想，是数学学习的一种优秀思维品质，是数学发现和创造的源泉，也是一种最基本的数学思维方式。指导学生“比较地学，联系地学”，应从细微处做起，从泛联想与类比做起，读到哪儿，想到哪儿，就旁注到哪儿。

例1 高中课标数学必修1(人教A版)教学中的联想与类比。

1. 目录的第一章导图中含有火箭发射、卫星运行、太空等元素。由火箭发射联想到速度、燃料、火药、中国古代四大发明、摆脱地球引力、运行轨迹等；由卫星运行联想到航天飞船、宇宙飞船、遨游太空、探索太空；进而联想到大千世界赖以存在的时间与空间。

目录的第二章导图中含有鱼群、鱼化石、海洋等元素。由鱼群联想到鸟类迁徙。鱼群群游过程中，以及鸟类集体迁徙过程中，会不会相撞，会不会发生“交通事故”？进而联想到生命与生息。

目录的第三章导图中含有兔群、荒漠、小水潭等元素。联想到澳洲泛滥的兔群、湖泊、河流、土地、生态。

继而，由以上三个章导图，联想到赵鑫珊的著作《建筑：不可抗

拒的艺术》中的两段描述："人首先要征服河流和海洋，然后去征服天空和太空，这是空间的征服。再就是时间的征服。""人类文明之旅，归根到底是征服时空之旅。"

2. 由"平面内到一条线段的两个端点距离相等的点的集合（即这条线段的垂直平分线）"联想与类比：平面内到一个角的两边距离相等的点的集合（即这个角的平分线）。进而联想与类比：在空间中，到一条线段的两个端点距离相等的点的集合（即这条线段的"垂直平分面"）；到一个角的两边距离相等的点的集合（即这个角的"平分面"）。

3. 由"到直线 l 的距离等于定长 d 的所有的点"，同学联想与类比：到平面（α）的距离等于定长 d 的所有的点；进而联想与类比：到直线 l 的距离等于定长 d 的所有的点，在平面上是两条平行线，分别位于 l 的两旁；在空间中是一个以 l 为对称轴（旋转轴）的"圆管"（两端无限延伸的"圆柱侧面"）。到平面（α）的距离等于定长 d 的所有的点是两个平行平面，分别位于平面 α 的两侧。继而联想与类比：到定点 A 的距离等于定长 r 的所有的点，在平面上是以 A 为圆心，r 为半径的圆；在空间中是以 A 为球心，r 为半径的球面；在数轴上是两个点，分别在点 A 的两旁。

4. "对于集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$"，即集合的包含关系具有传递性。由此联想与类比：实数的大小比较具有传递性，对于 $a, b, c\in\mathbf{R}$，如果 $a<b$，且 $b<c$，那么 $a<c$；平行线具有传递性，对于直线 a、b、c，如果 $a // b$，且 $b // c$，那么 $a // c$。但是，垂直直线不具有传递性，对于直线 a、b、c，如果 $a\perp b$，且 $b\perp c$，那么未必有 $a\perp c$；亲属称谓不具有传递性，如，A 是 B 的父亲，且 B 是 C 的父亲，则 A 是 C 的父亲，那就乱了套了。

5. "射高是指斜抛运动中，物体飞行轨迹最高点的高度。"由射高是竖直方向上最高点的高度，联想与类比：射程，则是水平方向上最远点的长度；由斜抛运动，联想到斜上抛、斜下抛、平抛、竖直上抛、竖直下抛、自由落体等运动。

6. 凡函数 $f(x)$ 的表达式为 x 的偶次方，如 x^2、x^4、x^{-6}等，都

满足关系式 $f(-x)=f(x)$，联想到偶函数概念的“偶”字名称的由来。类似的，凡函数 $f(x)$ 的表达式为 x 的奇次方，如 x、x^3、x^{-5} 等，都满足关系式 $f(-x)=-f(x)$，联想到奇函数概念的“奇”字名称的由来。

7. 由指数函数 2^x 与 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$（指数相同，底数互为倒数），$2^x$ 与 2^{-x}（底数相同，指数互为相反数），以及 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$，联想到倒数、相反数、负数中的“倒”、“反”、“负”是相通的，因此，2^x 与 2^{-x} 或 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是一种对偶关系。

8. 由 x 轴（$y=0$）和 y 轴（$x=0$）分别是反比例函数 $y=\frac{1}{x}$（或幂函数 x^{-1}）图象的渐近线，同学联想到：y 轴（$x=0$）是对数函数 $\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）图象的渐近线，x 轴（$y=0$）是指数函数 a^x（$a>0$ 且 $a\neq 1$）图象的渐近线。

9. 由对数函数符合函数方程 $f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$，指数函数符合函数方程 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$，联想与类比：正比例函数符合函数方程 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，幂函数符合函数方程 $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$。

10. 指数函数如 2^x，与对数函数如 $\log_2 x$，互为反函数，其图象关于直线 $y=x$ 成轴对称，是一对对偶关系；幂函数如 x^3 的反函数 $x^{\frac{1}{3}}$ 仍是幂函数。

二、指导精读、读透，做旁注

相对于一般科普读物可采用泛读而言，阅读数学课本则应指导学生尽量采用精读、读透的方法，不放过课本所呈现的任何信息。因为课本体现了课程标准理念，课本浸润着编者的意图、心血，课本承载着学科的历史、体系和文化。

例 2 对华东师大版数学七年级上册“绝对值”所做的解读。

（一） 定义绝对值概念的必要性

1. 汽车行驶的耗油量与行驶路程有关而与行驶方向无关；股票交易费与交易额有关而与买进或卖出无关；只考虑数轴上的点与原点的距离时，与方向无关。因此，不考虑方向的量是客观存在的。

2. 数已经被赋予了正号或负号（也称作性质符号），对应点在数轴上已确定了关于原点的方向。而现在重又提出不考虑方向，应怎样表达这种“还原”现象？

3. 从代数的角度观察，6 与 -6 互为相反数。撇开符号（负号），即可见其相同之处：6。应如何来描述这个现象？

4. 从几何的角度观察，在数轴上表示 6 和 -6 的点，与原点的距离相等。撇开方向，即可见其相同之处。应怎样来刻画这个现象？

（二） 定义绝对值概念的合理性

在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的**绝对值**，记作 $|a|$。

由于距离既是一个几何概念，也是一个物理概念，除了零，距离是用正数来衡量的，因此，除了零，任意一个数的绝对值是正数。

1. 数轴上表示零的点与原点的距离是零。因此，零的绝对值是零，即 $|0|=0$。而且，只有零的绝对值才是零。反过来说，绝对值是零的数只能是零（联想与类比：相反数是零的数只能是零）。此外，从代数的角度看，$+0=-0=0$，这就给予零的绝对值是零的又一个合理解释。

2. 从代数的角度看，6 和 -6 的绝对值都是 6；从几何的角度观察，在数轴上表示 6 和 -6 的点，与原点的距离相等。因此，绝对值反映了 6 与 -6 的相同之处。由于 6 是 -6 的相反数，因此 -6 的绝对值就是 -6 的相反数。反过来，6 既是 $+6$ 的绝对值，又是 -6 的绝对值。

3. “绝对”是对“相对”而言的。如果说，相反数呈现出的是“相对”的特征（正数的相反数是负数，负数的相反数是正数）；那么，绝对值呈现出的是“绝对”的特征（不管是正数，还是负数，其绝对值都

是正数)。如,6 与 -6 是相对的,但 6 与 -6 的相同之处,即共同的特征为 6,则是绝对的。

(三) 绝对值概念的内涵

1. 正数的绝对值是它本身。这说明,绝对值具有保正数的功能。另外,零的绝对值是零,也是它本身。反过来,绝对值是本身的数是正数或零。

2. 负数的绝对值是它的相反数。另外,零的绝对值是零,零的相反数是零,因此,也可以说,零的绝对值是它的相反数。反过来,绝对值是相反数的数是负数或零,再一次体现了零的特殊性。

3. 距离,是因为差别而产生的。因此可以说,有差别就有距离,有距离就会有绝对值。由于 $2=|2|=|2-0|$,对照绝对值的定义,它可以表示数轴上 2 对应的点与原点的距离。另外由于 $2=|-2|=|-2-0|$,它同样可以表示数轴上 -2 对应的点与原点的距离。又由于 $2=|2|=|5-3|$,$2=|-2|=|3-5|$,这就使得绝对值的概念得以延伸:它可以表示两个数 x_1、x_2 在数轴上对应点之间的距离:$|x_1-x_2|$。

4. 绝对值是非负的。这是首次提到数的"非负性",由此,存在绝对值最小的数,即零。

5. 正数、负数、相反数与绝对值之间的关系:

互为相反数的两个数的绝对值相等;

绝对值相等的两个数相等或互为相反数;

绝对值相等而符号相反的两个数互为相反数;

负数可以表示为它的绝对值的相反数;

正数可以表示为它的相反数的绝对值。

(四) 绝对值的其他功能

1. 负数的绝对值是它的相反数。这里实际上隐含着方向,因为负数与它的相反数是"方向相反的"。这说明,绝对值具有改变负数的符号(即负号)的功能。

起初,数的家族先是引进了负数,接着,相反数的概念把负数同

化为正数，当然，同时正数也被同化为负数。这说明，至此，成员、规则与家族是和谐的：现在，在绝对值的作用下，负数再一次被同化为正数。也可以说，绝对值具有“返祖”功能。它能使负数回归到正数，如 $|-2|=2$。

2. 在绝对值的作用下，正数没有被改变，仍是它本身(正数)；零也没有被改变，还是零(本身)；而负数则被改变为它的相反数(正数)。由此可见，绝对值像是一个陷阱、一个阀门，进得来，不一定出得去。只有零能够自由地出入，天马行空，独来独往。

3. 绝对值符号，在一个数的两旁各画一条竖线：$|a|$，这是两点间的距离的非常形象化的表示，这是又一个新的记数法。

三、明确数学符号、记数法与专业术语的意义

例 3 有关幂的记数法的模式辨识：

给一个 2 和一个 3，根据不同的记数法，即不同的构数形式，就表示不同的数。如把 2 和 3 置于同一层楼：□□，这是两位数。2 在左 3 在右，构成 23，表示二十三，是 $2\times10+3$ 的记数法表示；反过来，3 在左 2 在右，构成 32，表示三十二，是 $3\times10+2$ 的记数法表示。同样是含一个 2 和一个 3，由于构数形式不同，就表示两个不同的数。

又如把 2 和 3 置于两层楼：$\frac{\square}{\square}$，这是分数。2 在上 3 在下，构成 $\frac{2}{3}$，表示三分之二，是小于 1 的真分数；反过来，3 在上 2 在下，构成 $\frac{3}{2}$，表示二分之三，是大于 1 的假分数。同样用 2、3 两个数字，由于位置不同，分别表示两个不同的分数。

现在把 2 和 3 置于左下右上的两层阁楼：$\square^{\square}$，这就是幂。2 在左下 3 在右上，构成 2^3，这是 2 的 3 次方，或 2 的立方，或 2 的 3 次幂，底数是 2，指数是 3，运算结果(幂)是 8；反过来，3 在左下 2 在右

上，构成3^2，这是3的2次方，或3的平方，或3的2次幂，3是底数，2是指数，幂是9。因此，2^3和3^2同样表示两个不同的幂。

再看$(-2)^3$与-2^3。前者是一个幂，是-2的3次幂，底数是-2；而后者是一个幂的相反数，即2的3次幂的相反数。因此，两者记数法的意义不同，尽管运算结果相等，都是-8。

$(-2)^4$与-2^4。同理，前者是一个幂，是-2的4次幂，-2是底数，值是16；后者是2的4次幂的相反数，底数是2，值是-16。因此，两者不仅记数法的意义不同，而且运算结果也不同。

$\left(\frac{2}{5}\right)^3$与$\frac{2^3}{5}$。前者是一个幂，是$\frac{2}{5}$的3次幂，底数是$\frac{2}{5}$，值是$\frac{8}{125}$；后者是一个分数，分母是5，分子是一个幂，是2的3次幂，底数是2，分数的值是$\frac{8}{5}$。因此，这也是不同的记数法表示。

$\left(\frac{1}{5}\right)^3$与$\frac{1}{5^3}$。前者是一个幂，是$\frac{1}{5}$的3次幂，底数是$\frac{1}{5}$；后者是一个分数，分子是1，分母是一个幂，是5的3次幂，底数是5，这个分数也可以看作5的3次幂的倒数。因此，两者记数法的意义不同，尽管运算结果相等，都是$\frac{1}{125}$。

这都是括号"惹的祸"。加括号与不加括号，在哪儿加括号，都是慎重的事。加括号表示相对独立的个体，或表示一个范围，都属于记数法的范畴，但对应于不同的数学模型。

例4 对高中课标数学必修1(人教A版)"本书部分数学符号"所做的识读。

1. "属于"号$\in$，与"不属于"号$\notin$，两者表示对立关系，类似于等号"$=$"与不等号"$\neq$"。

用大写的拉丁字母表示集合，用小写的拉丁字母表示元素。此表示法与初中平面几何的有关表示法相反：如用大写的拉丁字母表示点，用小写的拉丁字母表示直线(直线可视为点的集合)；又如用大写的拉丁字母表示三角形的顶点，用小写的拉丁字母表示三角形的边。

相对于集合与集合之间的包含关系，元素与集合的关系一般地是隶属关系。

2. 空集$\varnothing$(null set, or empty set)，并非希腊字母 ϕ 的大写字母 Φ。

3. 自然数集 **N**，**N** 是“自然数”的英文 natural number 的首字母。

正整数集 $\mathbf{N}^*$(“ * ”念“星”，英 star)，或 $\mathbf{N}_+$(“＋”念“正”，正号，英 positive sign)，这种记号法，类似的有对应点、对称点，或序点的记号法：A', A'', A''', A_1, A_2, A_3；角度的记号法：$35°47'28''$；温度的记号法：38℃，104℉；化学离子、分子式、元素的记号法：氢离子 H^+，氧气分子 O_2，铁元素 Fe。

4. 整数集 **Z**，**Z** 是“整”字汉语拼音 zhěng 的首字母。

实数集 **R**，**R** 是“实数”的英文 real number 的首字母。

有理数集 **Q**，由于有理数可以表示为既约分数 $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0, (m, n) = 1$ $(m, n$ 互质))，即两个整数比，是商的形式，而“商”的英文是 quotient，首字母是 Q。

5. “包含”号$\subseteq$，类似于不等号$\leqslant$。$a \leqslant b$，表示在数值上，a 处于劣势，b 处于优势，等号“＝”成立时，表示等势。类似的，$B \subseteq A$，表示在容量上，B 处于劣势，A 处于优势，等号“＝”成立时，表示等势；表示在所含元素上，B 是“部分”，是劣势，A 是“整体”，是优势，等号“＝”成立时，B 和 A 的元素完全一致，自然是等势。

“真包含”号$\subsetneqq$(或$\subset$)，类似于不等号$\lneqq$(或$<$)，强调了不等，以区分绝对的劣势与绝对的优势。

6. “并集”号$\cup$，“交集”号$\cap$，有同学指出，这两个符号象杯子，置“盛放”的状态时感觉“多”，置“倒扣”的状态时感觉“少”。此与英文原版书上的描述不谋而合：The symbol for union is $\cup$, which is sometimes read “cup”, and $A \cup B$ is read either as “the union of sets A and B”, “A union B”, or “A cup B”; The symbol for intersection is $\cap$,

sometimes read "cap". Thus, A ∩ B may be read either as "the intersection of sets A and B", "A intersection B", or "A cap B".

7. "补集"的记号 $\complement_A B$,体现了三个主要的特征:集合 A,其中子集 B,其"补集或余集" $\complement$。$\complement$是"补集"的英文 complementary set 的首字母。此记号法类似于后续学习的对数式$\log_a x$。

"补集"是相对于"全集"而言的。一个通俗的例子,用 10 元钱买瓶冰绿茶花 3 元钱,那么找(补)钱是 7 元。如果用 20 元钱去买,那么找(补)钱则是 17 元。可见,找(补)钱有一个相对性。

类似的有余角和补角。余角(互余)是相对于 90°而言的;补角(互补)是相对于 180°而言的。照"补"的含义,"余"和"补"是相通的。

8. "区间符号"$[a, b]$含左、右端点,称闭区间;(a, b)不含左、右端点,称开区间;$[a, b)$可称左闭右开区间,$(a, b]$可称左开右闭区间。其中(a, b)与平面直角坐标系中点的坐标表示法一样,应注意结合上下文区别。区间可以用不等式表示,也可以在数轴上直观地表示,如用小实心点表示"闭",用小空心圈表示"开"。

9. 函数符号 $f(x)$,"函数"的英文是 function,首字母 f。$f(x_0)$表示函数 $f(x)$在 $x = x_0$ 时的值,如 $f(3)$、$f(x_2)$等。x 的函数可以用 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$等表示。类似地,常常用 26 个拉丁字母中顺序在前的 a、b、c 等表示常量、已知量、系数等;在后的 x、y、z 表示变量、未知量等;居中的 m、n、k 等通常表示自然数、整数等。

10. "映射"$f: A \rightarrow B$ 表示一种映射,一种关系,一种对应法则。它可以是解析式,也可以是表格,还可以是曲线(图象)。图象可以是直线、折线,也可以是分段的、离散的;可以是"规则"的,也可以是"不规则的"。

第 2 节　充分利用课本编写体例

现行教科书如华东师大版初中课标数学教材,其编写方式与体

例(如云图、章导图、章导题、试一试、想一想、做一做、读一读、阅读材料、课题学习等等)适宜学生阅读、思考与操作,应指导学生认真阅读课本,创造性地使用教材。

一、切实地“想一想”、“读一读”、“做一做”

例 5 华东师大版初中课标数学教材七(上)§2.9 有理数的乘法中“想一想”:

一个数与(−1)相乘,积是什么? 一个数与 1 相乘呢?

一个数乘以 −1,得到这个数的相反数。写成算式是:$a\times(-1)=-a$。因此,(−1)之于乘法,具有“反身术”。

特别地,$(-1)\times(-1)=1$。这里,(−1)既可以看作(−1)这个数本身,又可以当作一个变换,或一个运算,或一个规则。这样,$(-1)\times(-1)$ 就是自乘一次,或称“自作用”一次,变成了(−1)的相反数 1。

由 $a\times1=a$,联想与类比:$a+0=a$。可见,1 之于乘法与 0 之于加法,其作用和效果是一样的,都没有使 a 有丝毫的影响和动摇。

例 6 华东师大版初中课标数学教材七(上)§2.9 有理数的乘法中的“读一读”:

“队列操练中的数学趣题”。

一次团体操排练活动中,某班 45 名学生面向老师站成一列横队。老师每次让其中任意 6 名学生向后转(不论原来方向如何),能否经过若干次后全体学生都背向老师站立? 如果能够的话,请你设计一种方案;如果不能够,请说明理由。

注意到学生站立相对于老师有正面和背面两个方向,完全相反,因此,与具有相反意义的量有关。另外,向后转又可以想象为进行一次运算,或者说改变一次符号:因此联想到(−1)和乘法,因为(−1)之于乘法具有“反身术”的功能。(−1)以乘法方式作用于 1,即 $(-1)\times1=-1$,就使 1 变为相反数 −1。同样,(−1)以乘法方式作用于(−1),即 $(-1)\times(-1)=1$,就使(−1)变为相反数

1。因此，用1和−1来指代学生站立的两个方向适宜又简洁。而用“−1乘”则可以完全指代“向后转”。这里，(−1)具有双重角色：作为数本身和作为一个变换，或一个运算，并且都能起着符号的作用。

现在规定，每个学生的前胸用1指代，后背用−1指代。这样，一开始全体学生面向老师，老师面对的所有45个1的积是1。而如果最后全部背向老师，那么老师面对的所有45个−1的积是−1。这里用“积”而不是用“和”或别的什么，这是因为积对符号，也就是对正负号，最为敏感，反应最快。而且1的任意次幂仍为1，−1的任意次幂为1或−1，简单明快。

接下来，第1次6名学生向后转，即老师面对的有6个1变成了−1，还有39个1，它们的积仍是1。

而从第2次开始，每次6名学生向后转，情形都变得非常繁琐，因此适宜直接考虑符号变换规律。

事实上，每次6名学生向后转，就有6个数字(不管是1还是−1)都乘上了(−1)。由于这6个(−1)的积是1，因此并没有改变原先的45个数字的积。所以，经过任意次改变之后45个数字的积不变，始终是1，不可能是−1，原问题的答案是否定的。

这个问题中，如果把每次向后转的学生人数由6名改为7名或5名，或者把学生总数由45名改为46名或44名，那么原问题的答案都成为可能。由此可见，这个问题所涉及的两个数字45与6的奇偶性是确定的。

因为1和0是开关语言，开与关，有与无，也具有相反的意义。故也可让学生的前胸用1指代，后背用0指代。如果用运算“减去1，取相反数”来指代“向后转”，那么就能把1变成0，把0变成1：$-(1-1)=0$，$-(0-1)=1$。这样，一开始全体学生面向老师，老师面对的所有45个1的和是奇数。而如果最后全部背向老师，那么老师面对的所有45个0的和是0。

接下来，每次6名学生向后转，就有6个数字要改变。如果有偶

数个 1 变成 0，比如说有 4 个 1 变成 0，那么就有 2 个 0 变成 1，也就是说，就有偶数个 0 变成 1。这样的一次变换并没有改变老师面对的 1 的个数的奇偶性。如果一次变换有奇数个 1 变成 0，比如说有 1 个 1 变成 0，那么就有 5 个 0 变成 1，也就是说，就有奇数个 0 变成 1。这样也同样没有改变老师面对的 1 的个数的奇偶性。

综合上面两种情况可见，每次变换的 6 个数字的和都是偶数，因此并没有影响其他 39 个数字和的奇偶性。所以 45 个数字和的奇偶性不变，始终是奇数，不可能是 0，原问题的答案是否定的。

例 7 华东师大版初中课标数学教材七（上）§3.1 列代数式中的“做一做”：

某地区夏季高山上的温度从山脚处开始每升高 100 米降低 0.7℃。如果山脚温度是 28℃，那么山上 300 米处的温度为________；一般地，山上 x 米处的温度为________。

画简笔示意如图 3.1，通过初始的“小数实验”（一般常指自然数 1、2、3 等），采用不完全归纳，找出一般规律，从而列出代数式。（这种初始小数实验在数学学习与创造中经常使用）

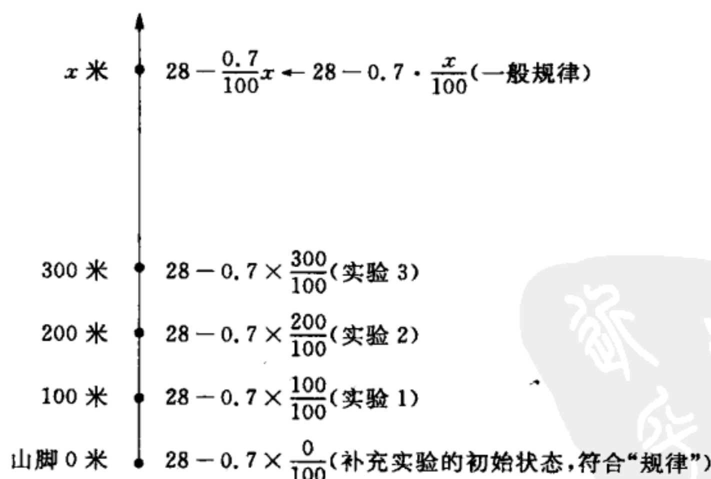


图 3.1

二、发挥章导图、章导题的“先行者”、导游图的作用

例 8 华东师大版初中课标数学教材七(上)第 1 章走进数学世界的章导图。

本章导图呈现出丰富的信息,如

(1) 数字:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9。

(2) 数:3.141 592 654。

(3) 字母:X、Y。

(4) 方程:$2x+y=10$。

(5) 恒等式:$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

(6) 名词:直角三角形。

(7) 符号:∞。

(8) 一位男士,一位女士。

通过观察这些信息,展开联想与类比,可在书页的空白处写下相应的旁注,或在课堂上交流。善于联想与类比,是学习数学的一种优秀的思维品质。

现在就上面列出的 8 条信息做些联想与类比,或适当的诠释。

(1) 数字 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 是印度—阿拉伯数字(Hindu-Arabic Numerals)。在钟表上常见到罗马数字(Roman Numerals)

Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ Ⅴ Ⅵ Ⅶ Ⅷ Ⅸ Ⅹ Ⅺ Ⅻ;

另外还有,巴比伦楔形数字

汉字的数字有小写大写两种,“一二三四五六七八九十”等是小写,“壹贰叁肆伍陆柒捌玖拾”等是大写。

数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 构成最初的 10 个自然数(natural number)，是构造整个数字大厦的基础，其中称作奇数(odd number)的有 1，3，5，7，9，称作偶数(even number)的有 0，2，4，6，8。小学里学过合数和质数(质数也称作素数)，质数为 2，3，5，7，合数是 4，6，8，9，而 0 和 1 既非质数又非合数。

(2) 由数 3.141 592 654(恰是计算器上显示的 π 的前 10 个数字)，好多同学一下子就联想到圆周率 π(小学就学过，迄今为止学到的第一个希腊字母)、祖冲之、圆、正多边形，还有约率 $\frac{22}{7}$ 和密率 $\frac{355}{113}$。

约率 $\frac{22}{7}$ 化为小数，计算器显示为 3.142 857 143，前 3 个数字 3.14 与 π 的值的前 3 个数字完全一样。密率 $\frac{355}{113}$ 化为小数，计算器显示为 3.141 592 92，前 7 个数字 3.141 592 与 π 值的前 7 个数字完全相同。所以密率较约率更接近于 π 的值，其名称就可以顾名思义。密率实际上很好记，把 113 355 分成两部分 113 和 355，再把 355 作分子，113 作分母就是了。

(3) 字母 X、Y 是大写的拉丁字母，小写字母分别为 x、y，因位于拉丁字母表的末尾，所以常用来表示未知数。相应地，最初的 3 个拉丁字母 a、b、c，常用来表示已知数。而排在中间的 m、n，则常用来表示自然数(自然数的英文 natural number 的首字母为n)。

(4) 方程 $2x+y=10$ (称作二元一次方程或不定方程)，是一架天平，等号两边是等量，左右应保持平衡。如取 $x=1$，则 $y=8$；取 $x=2$，则 $y=6$，……

(5) 恒等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (称作完全平方公式)，具有鲜明的几何特征(或几何模型)，可以由一些正方形(square)和长方形(rectangle)拼接或割补所成图形的面积来验证。

（6）由“直角三角形”（right triangle），同学们联想到三角尺（也称三角板），甚至有同学提到勾股定理。

（7）符号∞，在高等数学里表示无穷大（属于定性数学，不属于定量数学），它表示的是一种趋向于无穷大的“无限过程数”，而非一个非常大的确切的数。

人生有限，数目无穷。但人生有限的人的头脑能够驾驭无限的数目，以有限的方式来表示无限，化无限为有限，创造有限的记号“∞”来表达一个“遥远的无限过程数”。

（8）章导图中有一位男士，一位女士。有同学据此提到两个符号：♂♀。太棒了！在人类社会领域，这两个符号分别表示男和女（男性和女性），在生物学领域，则分别表示雄性和雌性。

在古希腊，奇数可以用来表示男人，偶数可以用来表示女人。中国古代的《周易》记有阴阳奇偶的说法，即奇数为阳，偶数为阴。此处，男士和女士，与数字放在一起，真是妙极了！

例 9 华东师大版初中课标数学教材七（上）第 3 章整式的加减的章导图。

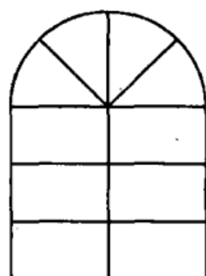


图 3.2

本章导图主要是一个窗框材料的计算问题。如图 3.2 所示，上半部为半圆，下半部为六个大小一样的长方形，长方形的长与宽的比为 3∶2。

如果长方形的长为 0.4 米、0.5 米、0.6 米，那么宽分别是多少米？

由于长∶宽 $= 3:2 = \frac{3}{2} = 1 \times \frac{3}{2} = 1 \div \frac{2}{3} = 1:\frac{2}{3}$，

因此，有表 3.1：

表 3.1

长（米）	0.4	0.5	0.6	…	x
宽（米）	$0.4 \times \frac{2}{3}$	$0.5 \times \frac{2}{3}$	$0.6 \times \frac{2}{3}$	…	$x \cdot \frac{2}{3}$

由此，如果长方形的长是 x 米，那么宽就是 $\frac{2}{3}x$ 米。由图 3.2 可

知，长方形的长与圆中半径的总和是 $11x$ 米，宽的总和是 $9\cdot\frac{2}{3}x$ 米$=6x$ 米，半圆的长是 πx 米(这里，π 和 x 都是字母，但 π 表示常数圆周率，所以 π 写在前面，x 写在后面)，故所需材料的总长度是 $11x+6x+\pi x=(17+\pi)x$(米)。

这里出现了用字母表示数、代替数，可以通俗地称作代数，上式就可以称作代数式。

导图中还出现两个新名词：代数式、整式，这将从本章开始学习。

如果说，从一个手指或一根粉笔认识数字 1 是数学的第一次抽象、第一次飞跃；那么，由数字到字母就可以说是数学的第二次抽象、第二次飞跃。字母、数字、符号组合而成为式，字母就成了由数到式的桥梁。

此外，常见窗框的上半部为半圆形，下半部为方形，这是一种方圆结合，可以寓意“天圆地方”。最典型的有如凯旋门、伊斯兰建筑门廊、田径场地等。方与圆是建筑构形的两个基本元素。

例 10 华东师大版初中课标数学教材八(上)第 13 章整式乘除的章导图与章导题。

本章的导题及其导图都扮演着整章先行者的角色。通过图 3.3 矩形及其分割产生的面积关系，也就是整体与部分的关系，建立了相应的代数模式，即多项式与多项式的乘法：$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$。

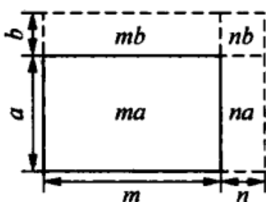


图 3.3

这是一种典型的形数结合，并几乎贯穿于整章始终。例如，导题的长方形林区长宽的增加与面积的增长；乘法公式中的两数和乘以它们的差、两数和的平方，以及两数差的平方；课文中例题的正方形草坪南北向加长及东西向缩短；练习题中的裁挂历画包课本，正方形桌子铺盖较大的正方形桌布；习题中的用若干张边长为 a 的正方形硬纸卡片拼出新的正方形，长方形玻璃裁掉两边后铺盖办公桌

台面，正方形空地四周修筑围坝，中间修建喷泉水池，或四角均留出小正方形修建花坛，其余种草坪；复习题中的正方形边长的增减对应面积的增减，长方形长的增减对应宽的减增，面积保持不变；直至章后的课题学习，用一些正方形与长方形的硬纸片拼成的图形面积来解释有关的代数恒等式，等等。

导题中的长方形林区，原长 m 米，宽 a 米，则面积构式 ma 就可视为单项式与单项式相乘。如果仅增长了 n 米，则面积构式为 $(m+n)a$，或仅加宽了 b 米，面积构式为 $m(a+b)$，均可视作单项式与多项式相乘。而现在既增长了 n 米，又加宽了 b 米，则林区的面积构式 $(m+n)(a+b)$，就可视为多项式与多项式相乘。

导题中的多项式与多项式相乘：$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$，左边可视为积式，和之积；右边可视为和式，积之和。从左边到右边可视为化积为和，且不论从几何的角度还是从代数的角度都可以看作是化整为零。上式左边还可以变式为：$(m-n)(a+b)$，$(m+n)(a-b)$，$(m-n)(a-b)$，$(m+n)(a+b-c)$，$(a+b)(a+b)$，$(a+b)(a-b)$ 等。

三、指导学生参加"课题学习"

例 11 对华东师大版初中课标数学教材七(上)第 3 章课题学习"身份证号码与学籍号"的解读与实践。

本课题学习主要有两项任务，一是收集、分析、认识身份证号码，二是设计本校学生的学籍号。完成这一课题学习的基础主要有两项：一是学生已经学会了用数字来表示某种对象的数量，这完成了第一次抽象表示。也学会了用字母来代替具体的数，以及用数字来代替某种对象，这完成了第二次抽象表示，即学会了用符号表达某种对象。也可以说学生已初步具有了"对应"的意识。二是收集、调查有关信息的方式、方法。由于需要一定的时间和校外空间以及有寄宿生的原因，所以提早预先布置，同时共同阅读和讨论了教科书本课题学习的内容。

经反馈交流、学生调查，收集的身份证号码主要来源于以下几个方面：家人、亲戚、报纸（如身份证遗失或作废声明）、电视（如获奖者身份证号码），还有上网查询等。同学们经历了一次有目的的社会实践、调查活动，增进了与人交流的能力。另外，经讨论，同学们普遍认为，在一般情况下，不必也不要随便指明是谁的身份证号码，重视自我保护和尊重别人隐私的意识。

从学生调查形成的书面报告以及课堂交流中可以看出，学生基本上都能正确识读身份证号码，认识其中的规律和指代。身份证号码先后有 15 位和 18 位的两种。它们的区别主要在两处，一处是先前 15 位的表示出生年份的代码只用了公元纪年 4 个数字的后两个数字，如，只用 61 来表示 1961 年。而后来 18 位的表示出生年份的代码则完整地使用公元纪年的 4 个数字。之所以由两位数字改用完整的 4 位数字表出生日期，同学普遍能理解是为了准确表达身份信息，否则如 1902 年出生与 2002 年出生的，只用后两个数字 02，就没法区分了。另一处是，18 位相对于 15 位最后多出一位。同学们通过查询，知道它可以被称为“识别码”，或“特殊代码”、“X 代码”、“校验码”(现通称为校验码）。并指出，作为尾号的校验码，是由号码编制单位按统一的公式计算出来的，共有 11 个字符，即0～9 这 10 个数字再加上 X，X 是罗马数字，代表 10。可以利用电脑，只要输入规范的身份证号码的前 17 位数字，就可以随机生成最后一位的校验码。有同学认为，为防伪造，公安部门设立了最后一位校验码。也有同学指出，校验码是为了防止输入时出错而设置的，它是由前 17 个数字通过某种运算模式算出来的结果。在输入时，只要前 17 个数字中有一个输错，那就不可能等于最后这个校验码。

可见，信息的呈现与隐匿并存，这是一种辩证的统一体。如果说前 17 位数字算是明文的话，那么加上这最后一位校验码构成的 18 位数字就成为密文了，因为由前 17 位数字本体码产生第 18 位数字是一种加密处理。因此，从先前的 15 位数码到后来的 18 位数码是一种进步，是经过社会实践自然产生的必然结果，可能是出于社

会公共秩序与公共安全的需要考虑的。

身份证号码的前6位表示地址码。有同学指出，3505是福建省泉州市的编码。有同学举例512222指四川开县。有同学提供，地址码表示编码对象常住户口所在县(市、旗、区)的行政区划代码，按GB/T 2260的规定执行。

由地址码的编制说明，全国的省份，每个省份所辖的地、市，以及每个地、市所辖的县(市、旗、区)的数码均没有超过两位数。

地址码后的八位数字，即第7～14位数字(旧版的是六位数字，即第7～12位数字)表示出生日期码，同学们都能准确识读，如月份和日期不够两位的，则在其前分别用0占位，就统一为两位数字，这是常识，如1967年3月15日出生的公民，其出生日期码，旧版是670315，新版是19670315。有同学提供：出生日期码表示编码对象出生的年、月、日，按GB/T 7408的规定执行，年、月、日代码之间不用分隔符。

校验码前的三位数字，即第15～17位数字(旧版的最后三位数字，即第13～15位数字)表示顺序码。同学们一般都能识读出，该顺序码可以识别性别，是单数(奇数)的表男性，是双数(偶数)的表女性。有同学识读，假如两个人于同年同月同日同地出生，又是同性，地址码和出生日期码就都相同，无法区别，所以设置了三位数字，容纳量大了，可以避免重复。有同学识读，顺序码002指第一个出生的女婴，004指第二个出生的女婴，006指第三个，……又如，001指第一个出生的男婴，003指第二个出生的男婴，005指第三个，……有同学认为顺序码指的是出生那一天第几个登记户口，男性按第一个001，第二个003，……排列编码；女性按第一个002，第二个004，……排列编码。有同学识读，001表示所有当天出生的人中，第一个申请身份证的男同胞，002表示所有当天出生的人中，第一个申请身份证的女同胞。

在反馈交流中，同学们还提出和讨论了以下几件事：年满16周岁的公民具有不完全刑事责任，而年满18周岁为完全刑事责任人。

针对“成人的身份证号码”提出，婴孩、儿童和少年为什么没有推行身份证制度？有同学指出，自 2003 年开始，出生的婴儿，只要父母愿意，就可以代为申请身份证。有同学指出，全国人大通过的《身份证法》已于 2004 年 1 月 1 日施行。有同学总结出，公民身份号码的编码对象是具有中华人民共和国国籍的公民，公民身份号码是特征组合码，由 17 位数字本体码和一位数字校验码组成，排列顺序从左至右依次为：6 位数字地址码，8 位数字出生日期码，3 位数字顺序码和一位数字校验码。另有同学提出，随着社会的发展和科技的进步，未来的身份证是否增加血型、指纹，或基因的信息？

学籍号的设计，归纳起来大致有以下几种。有同学设计为 F1 2006 19 15 G，并解说：F1 表示五中分校（F 表总校，F 为“五”的英文 five 的首字母），2006 表示届数（毕业年份），19 表示班级，15 表示号数，G 表示女生（“女生”英文 girl 的首字母，B 表示男生，取 boy 的首字母）。有同学有三种设计方案：W 2006 20 16 G，其中 W 表示五中，“五”的汉语拼音的首字母；05 2006 20 16 0，其中 05 表示第五中学，尾数字 0 表示女生（男生用 1 表示）；2003 20 16 0，其中 2003 表示年级（入学年份）。庄萌凤、方颖等同学设计如：2003 01 11 2 C。其中倒数第 2 个代码 2 表女生（男生用 1 表示），C 表示初中部，“初中”的汉语拼音的首字母。有同学设计为 51 2003 19 09 G。其中 51 表示五中分校（五中本部用 50 表示）。有同学设计为 WZFX 2006 19 01 B。其中 WZFX 表五中分校，分别是汉语拼音的首字母。有的同学这样设计：前两个数字用 50 代表五中分校；接着用 1 代表初一年级，2 代表初二年级，3 代表初三年级；然后用 4 代表女生，5 代表男生；最后用 4 个数字代表班级、号数，同学们议论认为，这样的设计没法区分不同的两届但相同的年段。有些同学设计成全国通用的形式如：3505 2003 3 1 19 39 0，并说明：3505 指福建省泉州市；2003 指入学就读年份；3 指初中（托儿所为 0，幼儿园为 1，小学 2，初中 3，高中 4，大学 5）；1 指初一年级（2 指初二年级，3 指初三年级），19 指班级，39 指号数；0 指性别女（男性 1），同学们议论认

为，这样的设计欠缺区分相同的学段但不同的学校。有同学还为学籍号设计了密码，以防假冒。如：A 51 2003 06 19 04 9。其中 A 表示女生(男生 B)；51 表示五中分校(五中总校 50)；2003 表示入学年份，06 表示毕业年份；19 04 表示班级、号数；最后的 9 是密码，如上述前 12 个数字相加得 31，再加上 9 使得刚好整 10(如果前 12 个数的和是 40，那最后的密码就是 0)。有同学提出尾数用奇数表男生，偶数表女生，可只用一位数码，同时还可以作为防伪编码。

通过本课题的学习，同学们经历了调查、收集资料，分析、识读信息等过程，体会了分类、排序、归纳等数学思想方法，感悟了数学的应用价值，提高了合作交流能力和表达、解说能力，形成了符号感及其正迁移。有同学交流了车牌号的调查分析(还注明：以下车牌号都是举例的)，如，闽 C 16991，其中闽 C 表示福建泉州的车，号码的第一位数字都是一个地方的代号，1 指市区。又如，闽 C 38561 中的数字 3 是安溪县的代号，闽 C 46637 中的数字 4 是永春县的代号。另外，泉州市政府的用车是 0 字开头的，如闽 C 02590。而其他地方的政府用车是地方代号加一个 0，像闽 C 80662 是石狮市的政府用车。有同学举了邮政编码：福州 350000，厦门 361000，泉州 362000，上海 200000 等。有同学举了国际长途直拨电话代码：中国 0086，澳大利亚 0061 等；国内长途直拨区号：福州 0591，厦门 0592，泉州 0595，长沙 0731 等。有同学举了条形码：华夏长城干红葡萄酒 6901009901005，全无敌驱蚊片 6911348220026，五彩衣架 6930883012323，金门圣祖贡糖 4719852240194，嘉嘉牌中性笔 4892337108353 等。有同学提供：条形码是一种利用光电扫描阅读设备识读并实现数据自动输入计算机的特殊编号。商品条形码是由一组规则排列的条、空及其对应字符组成的表示一定信息的商品标识。EAN－13 条形码所表示的代码由 13 位数字组成，前 3 位数字为表示国家或地区代码的前缀码；第 4～7(或 4～8)位数字为制造厂商代码；第 8～12(或 9～12)位数字为商品代码；最后一位数字为校验码。

第4章 数学课堂教学中的“有效互动”

第1节 对数学课堂教学中有效互动的理解

一、有效互动的本质

互动是指在一定社会背景与具体情境下，人与人之间发生的各种形式、各种性质、各种程度的相互作用和影响。课堂教学中的互动主要指学生与教师、学生与学生之间在教学内容、教学情境等方面的互动。学生学习数学是一种认识的自我建构过程，在这个过程中，学生不是被动地接受知识，而是在教师的引导下获得知识，形成技能，发展思维，学会学习。由于学生的个性、认知水平和学习能力的差异，他们在学习过程中会出现不同的认知方式和思维策略，以及不同的解决问题的方法。上述种种情况，只有通过交流才能发现，只有通过互动才能得以解决。同时通过互动，教师应对、解决学生在课堂中生成问题的能力将不断提高，从而丰富自己的教学经验。

数学课堂教学中的互动围绕着教学目标展开，能引发学生深入思考，启迪学生的思维，使思维碰撞产生智慧的火花。数学课堂教学中的互动具有生成性，不仅使学生学到基本的知识与技能，而且

经历了过程，领会了方法，积累了数学活动经验，感受到情感、态度和价值观的熏陶，从而达到三维的教学目标。只有当数学课堂教学中的互动达到师生共同发展的程度，这样的互动才称得上是有效互动。反之，在课堂教学中，如果教师与学生之间的关系只是简单的施加与接受、刺激与反应，就不能认为彼此之间有互动，当然更谈不上是有效互动。

二、有效互动的形式

（一）师生互动

数学课堂教学中的师生互动是一种特殊的人际关系，是在学生独立思考的基础上产生，发生在师生间的一切交互作用和影响。互动中的师生之间的关系是主体与主体之间的关系，要避免课堂教学中教师对学生的单向作用，克服由教师与学生的角色身份及地位的差异所导致的课堂教学中另一种师生关系——“控制—服从”，真正做到师生共同参与到互动活动中。此外，师生互动还受参与程度和交往的情感质量的影响，因此，互动中的师生之间的关系应是一种平等对话、相互包容和共同分享的关系。

例 1 在《多边形的内角和》教学中，教师借助四边形介绍了多边形的对角线后，要求学生画出四边形、五边形、六边形的所有对角线，并回答各个多边形对角线的条数。由于多边形的边数较少，学生能清晰地画出图形，并借助图形准确地数出对角线的条数。当多边形的边数逐渐增加时，用画图及数数的办法解决问题的难度也随之增大，这就为探索多边形对角线的条数创造思维的空间。下面是师生关于探究“多边形对角线条数”互动部分的过程实录：

师：请同学们画出七边形的对角线。

（生$_1$ 上台画了七边形的对角线如图 4.1）

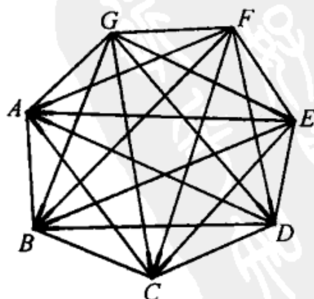


图 4.1

师：七边形的对角线怎样画？总共有几条？

生$_1$：按顶点的顺序依次画，共有 14 条。

师：(教师转向全体学生，接着问)14 条，数对了吗？怎样数出来的？

(班上有几个声音说数对了，教师再转向生$_1$)

生$_1$：仍然按顶点的顺序依次数，第一个顶点 4 条，第二个顶点 4 条，第三个顶点 3 条，第四个顶点 2 条，第五个顶点 1 条，第六个顶点 0 条，第七个顶点 0 条。共 $4+4+3+2+1=14$ 条。

(教师利用图形，再重复示范一遍，在示范过程中，教师有意在第一次画出的对角线中，将其中的一部分加粗，便于学生清晰地看到结果(如图 4.1)，得到全班同学的认可，进而理解了算法)

师：还有没有不同的计算方法？(没有人吭声，教师接着问)

师：十二边形有几条对角线？(由于图形不好画，全班沉默。教师用问题启发学生)

师：在这里，画图、数数已难以再继续进行，我们通常采用什么办法解决问题？

(沉默片刻，终于有一个微弱的声音："找规律"，教师马上给予表扬与肯定，并要求学生沿着这一思路去探索多边形对角线的条数)

师：(继续引导)探索规律，从何下手？

生$_2$：从四、五、六、七边形入手研究他们的规律。

师：从简单的多边形入手，研究它们的规律，再推广到一般图形并验证修正。哪位同学想好了，请说一说如何探索多边形对角线的条数规律。

生$_3$：(该生以七边形 $ABCDEFG$ 为例)从七边形的顶点 A 出发可以引出 4 条对角线，从顶点 B 出发可以引出 4 条对角线，从顶点 C 出发可以引出 4 条对角线……(还没有说完，就有其他同学说重复了)

师：(追问)这样计算，重复了多少？

生$_3$:多了一倍,七边形对角线的条数应该是$\frac{7\times4}{2}$。

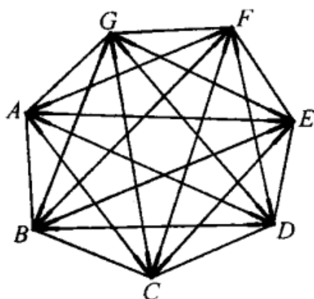


图 4.2

(教师依照该生的计算方法,借助图形的直观,按顶点的顺序边画边数,遇到已有的对角线,教师就用红色笔再重复一遍,如图 4.2,让学生清晰地看到从每一个顶点出发引出的对角线,确实多了一倍)

师:那 n 边形呢?(生$_3$ 答不出)

师:请大家回到七边形对角线的计算中,想一想算式中的 7 和 4 各代表什么意思?

(这时,另有一学生抢着回答了 n 边形对角线的条数)

生$_4$:$\frac{n\times(n-3)}{2}$。

师:这个答案对不对?哪位同学能解释一下?(教师问了几个学生都答不上,只好指着七边形对角线的条数的算式$\frac{7\times4}{2}$继续启发),算式中的 7 和 4 各代表什么意思?

生$_3$:7 代表它的顶点数,4 代表从一个顶点只能作 4 条对角线。

师:很好,理解得非常正确!但为什么从一个顶点只能引出 4 条对角线?请大家回想对角线的概念。(教师与学生共同回忆对角线的概念,让学生认识到 4 的由来,即七边形中与某一个顶点不相邻的顶点数有 $(7-3)=4$,这就将"找线的条数"转化成"找点的个数",从而使学生理解公式 $\frac{n\times(n-3)}{2}$ 的由来:n 边形有 n 个顶点,而与某一个顶点不相邻的顶点有$(n-3)$个,故从这个顶点可引$(n-3)$条对角线。又由于两点确定一条直线,故从各个顶点这样引出的对角线中每条都重复一次,结果应再除以 2。最后,教师再要求学生举例验算确认)

师:还有其他的探索方法吗?(有学生问:能否利用生$_1$ 求七边

形对角线条数的方法解决问题?)

师：你这个想法很好，请同学们仍然从简单的图形入手，试一试，再将其推广到一般情形。

生$_5$：$(n-3)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+\cdots+4+3+2+1$。

师：说一说理由。

生$_5$：以七边形为例。第一个顶点扣除本身及相邻的两个顶点，有 $(7-3)$ 个顶点可以与第一个顶点相连结，可作出 $(7-3)$ 条对角线；第二个顶点与第一个顶点类似，也可作出 $(7-3)$ 条对角线；第三个顶点扣除本身及相邻的两个顶点及第一个顶点后，有 $(7-4)$ 个顶点可以与第三个顶点相连结，可作出 $(7-4)$ 条不重复的对角线；第四个顶点扣除本身及相邻的两个顶点及第一、二个顶点后，有 $(7-5)$ 个顶点可以与第四个顶点相连结，可作出 $(7-5)$ 条不重复的对角线；类似地，第五个顶点可作出 $(7-6)$ 条不重复的对角线；第六个顶点扣除本身及相邻的两个顶点及第一、二、三、四个顶点后，不能作出新的对角线；同理，第七个顶点也不能作出新的对角线。将上述获得的七边形对角线条数的规律推广到 n 边形，就得到 $(n-3)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+\cdots+4+3+2+1$。

(教师将该生的计算方法，借助已有的七边形按顶点的顺序再次让学生直观感知。这样，为一般化的推导奠定了基础)

师：从表面看，用不同的思路解决问题，所得的结果看似不同而实质相等，其中生$_5$ 所推得的 n 边形对角线的条数公式，以后利用高中数列的知识可化简为$\frac{n\times(n-3)}{2}$。综合两种解决问题的不同方法，使我们认识到：在探索规律时，应从简单的情况入手，研究它们的规律后，再推广到一般的情形并验证确认或修正。

以上的互动，教师不是简单地重复学生的结论，或以一人答案代替全班答案，而是抓住适当的时机启发引导学生思考，并以图形作为直观辅助工具，利用特殊的表达方式让全体学生认可，以合情推理的方式获得结论。

（二）生生互动

生生互动是学生与学生之间的相互影响和交互作用。它与师生互动的区别在于，互动主体（学生）的角色相同，地位无明显差异，因此，他们之间更容易进行平等交流与对话。由于学生之间在知识结构、智慧水平、思维方式、认知风格等方面存在一定差异，以致解决问题的策略和方法也会有所不同。正是这种不同，使得生生互动成为教学中不可或缺的环节。生生互动，使得每个学生都有机会发表自己的观点，倾听他人的意见，可以彼此争论、相互启发、相互补充，实现思维能力和良好的人际交往技能的提高。

生生之间的互动可以发生在同桌之间、小组之间或班级之间，但最为典型的是小组合作学习。小组的组合可以是同质小组，也可以是异质小组。互动的地点可以在课堂里，也可以从课内延伸到课外。在数学课堂教学中，为了使生生互动得以真正实现，教师应搭建有利于生生互动的平台，如通过创设开放性问题或一题多解的习题来促进生生互动。

例 2　在“探索三角形全等条件”的教学中，教师通过创设需要小组合作学习的问题情境，引发生生之间的互动：

图 4.3 的原图形都是标有角的度数、边的长度的不同三角形，由于它们不同程度地被墨汁污染了，只看到原来的一部分。想一想，你能将各图形中的原三角形画出来吗？请动手画一画，并将所画的三角形剪下来，然后在小组内相互比较一下，并交流、讨论：由这些图形能获得什么猜想或结论，能提出什么新问题。

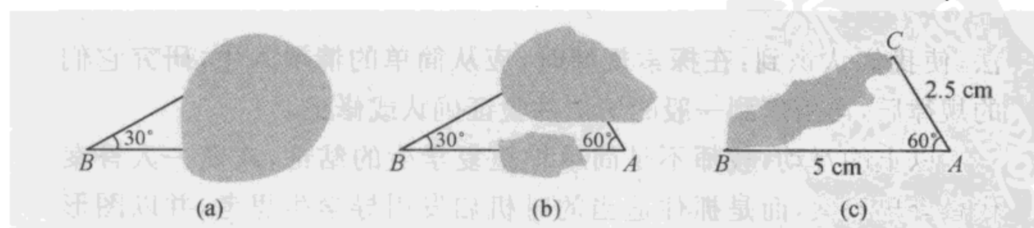


图 4.3

这是一个难度较大，需要生生互动，才能得出结论的问题。学生经过独立思考，画出并剪下图形后，通过小组交流、比较所得到的三角形，会发现根据图(a)、(b)提供的条件所得到的三角形不一定相同，而根据图(c)提供的条件所得到的三角形全部一模一样。从而获得以下结果："根据图(a)、(b)中所保留的数据无法确定原三角形，而根据图(c)所保留的数据可以确定原三角形"。根据这个结果他们可能还会得到(或提出)以下的猜想和问题：

猜想1　只给一个条件(一个角)画三角形时，大家画出的三角形不一定全等；

猜想2　只给两个条件(两个角)画三角形时，大家画出的三角形不一定全等；

猜想3　给出三个条件(两条边及其夹角)画三角形时，大家画出的三角形一定全等。

问题1　只给一个条件画三角形时，大家画出的三角形一定不全等吗？

问题2　只给两个条件画三角形时，大家画出的三角形一定不全等吗？

问题3　给出三个条件画三角形时，大家画出的三角形一定全等吗？

(三) 学生与文本互动

学生与文本的互动是生生互动、师生互动的基础。学生与文本的互动是基于教师对问题引导下的自主探索过程，是独立解题和解读教材的过程。由此获得的见解和结果、产生的困惑与问题，是生生互动、师生互动的宝贵资源。反之，学生与文本互动的质量又有赖于生生互动、师生互动，它们之间是相辅相成的关系。

第 2 节　如何进行数学课堂教学中的有效互动

一、营造有效互动的环境

由于师生在课堂中角色地位的差异，容易产生教师的权威性，导致互动中学生既不敢提问，也不敢大胆回答。他们或因担心自己的所说所答不符合教师心目中的答案，引起教师的责备；或害怕自己所提的问题太肤浅，引发同学的讥笑，便在课堂互动中缄默不语，使得教师无法了解当前教学过程中学生的真实学习状况，无法真正做到有针对性地进行教学。为了营造民主、和谐的互动环境，以宽松的外部条件和良好的心理环境来支持课堂教学中的有效互动，必须做到以下三点。

（一）师生平等

师生平等主要指师生人格上的平等。师生平等意味着教师不再是教学活动的主宰者，而是设计者、组织者、引导者、参与者。教师上课不仅是传授知识，而且是和学生一起分享理解，共同学习。师生平等也意味着教师要善于听取学生的意见，尊重学生的人格，关注学生的情感，以减轻学生的心理负担。如果师生关系平等、融洽，学生对老师就会喜爱，继而会产生对老师所教学科的喜爱，就容易营造宽松愉悦的互动氛围。在这样的氛围中互动，学生的思维就容易被激活，课堂教学效果就好。反之，在沉闷僵持的氛围中，师生不容易产生情感互动，学生就容易产生逆反心理，有效互动就无法实施，因此师生平等是有效互动的基础。

（二）学生主体参与

学生主体参与不仅有行为参与，更主要地表现在情感与思维的参与。学生主体参与互动意味着在互动中学生自始至终充当着主

人的角色，把学习看作是“自己”的责任，而不光是教师的事情。学生主体参与互动，可以让每个学生“体验进步的快乐”，有利于建立良好的人际关系；可以使互动充满活力，提高互动的质量；可以使学生充分利用已有的认知结构，对外界信息进行主动选择、推断及建构。否则，学生若不愿学、不爱学，教师的所有措施将付之东流，教学就失去它原本的意义。因此，学生主体参与是有效互动的前提。

（三）评价

“人性中最深切的禀赋是被人赏识的渴望。所以施以积极性评价，振奋他的精神，是必要的，而且能产生巨大效应。”有效的评价应该以赏识、激励为手段，以评价的内容为学生所认可为原则，以促进学生发展为目标，真挚、真实、具体的评价才能走进学生的内心世界。在互动中，教师不但要有一双慧眼，善于发现学生“微不足道”的优点，用真诚的语言赞美学生的进步，点燃学生希望的火把，使学生从中获得精神的鼓舞，奋发向上的动力；而且还要有宽容学生过失、激励学生上进的心态。只有这样，有效的互动才能进行，否则，学生因害怕教师的批评，不敢吐露真言，发表自己的见解，有效的互动就无法进行。因此，教师真诚的评价是有效互动的酵母。

二、创造有效互动的空间

数学课堂教学中的有效互动是师生、生生围绕着本课的教学目标、教学内容而进行的循环式的相互作用与影响。互动深化了学生对知识的理解，避免或减少作业中的错误，提高做作业的效率，赢得宝贵的时间；互动促进了师生双方特别是学生学习、认知的发展。为了使互动得以有效展开，教师不但要对互动的内容进行课前预设，而且要注意观察，善于捕捉课堂中产生的可“生成”资源。它是课堂教学中有效互动的动力，否则有效互动将成为无源之水、无本之木。

数学学习大致可以分成两种类型，一类是数学基本事实（包括概念、性质、公式、法则、定理、公理）的学习，一类是基本事实应

用的学习。因此，我们将从以下两方面来谈谈有效互动空间的创设。

（一）在知识形成过程中创设有效互动的空间

知识形成过程中的生生、师生的有效互动应建立在学生对所学内容有所了解，有所思考的基础上。了解所学的内容，学生就知道了自己的目的地；对所学内容有所思考，互动就不再局限于教师已有的知识和经验，还会有学生的认知与智慧。为此，教师应当做到以下几点：

1. 创设情境　激发学习欲望

苏联心理学家赞可夫说："教学法一旦触及学生的情感和意志领域，触及学生的心理需要，这种教学法就会变得高度有效。"因此，在教学时，教师应创设可引出问题的情境，利用该情境点明本课的学习主题，让学生大致了解你将把他们带到哪里，并借此激发学生的学习热情或探索学习的欲望。

例 3　在《相交线中的角》的教学中，由于三条直线相交是两直线相交的拓展与延伸，教师可以从学生原有的认知"两条直线相交所成的角"出发，以旧引新，通过一个实践活动为引入三线八角的探索活动奠定基础，为点明主题作铺垫。具体如下：

（1）以旧引新，创设情境：

如图 4.4，直线 a、l 相交，得到 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$，根据它们的位置特征或数量关系，将其分为对顶角与邻补角，其中对顶角有________，邻补角有____________________________。

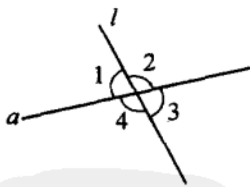


图 4.4

（2）实践活动：请同学们在相交两直线 a、l 所在的平面内，再画一条与直线 l 相交的直线 b。想一想，会出现什么样的情形，有几种不同类型的情况，图形中所增添的不同位置的角你都认识吗？

学生的实践结果可能五花八门，但经过适当的处理（如改变表示直线的线段长短或图形的相对位置等），就可以将学生所画的图形按交点的个数进行归类整理，得到图 4.5 所示三种情况：

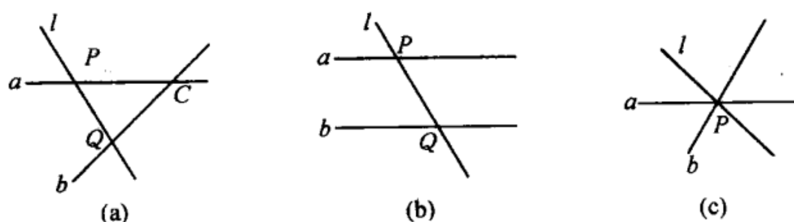


图 4.5

期间，还应让学生了解分类思想在解决问题中所起的作用，逐步获得用分类思想解决问题的经验，培养学生思维的严密性。由于三直线相交所成的不同位置的部分角的关系不能用已认知的知识来表述，这就让学生产生认知上的冲突，同时激发他们进一步学习的愿望。也为点明本课学习主题——继续学习相交线中的角，即相交线中不同顶点两个角的位置特征获得时机。

2. 给予学生与文本互动的空间与时间

首先是恰当的问题预设。它是学生与文本有效互动的关键要素，若没有预设，学生的思维就没有了着落点，互动中学生的主体参与就有可能流于形式。对此，教师必须凭借自己的经验和智慧，针对所学的内容进行问题设计，将知识的形成过程设计成由浅入深的问题串的形式，引导学生运用比较、分析、综合、归纳、演绎等高级认知活动进行自主探索学习。同时，由浅入深的问题串设计应注意学生个体差异与不同学习需求，让每一个层次的学生在同一时间段里都拥有自己探索的时间与空间，有发挥自己潜能的机会。这样的预设才能为持续的互动提供充足的动力。

例 4 在上例《相交线中的角》的教学中，教师点明学习主题后，为了避免放羊式的探索，给学生一个思维方向的引领。教师可采用先引导，后放手的策略，引出一组教师精心设计的问题串，让学生自主探索学习或合作学习。具体如下：

拓展延伸，探索新知识：

由于图(c)中角的一些关系可以归到两直线相交的情况，图(b)也可以看作图(a)在去除交点 C 部分余下图形的特例，所以问题归

结为探究图 4.6 所示两条直线 a、b 被第三条直线 l 所截，得到 8 个角中不同顶点角的位置关系。

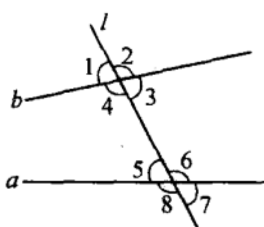


图 4.6

探索问题：

如图 4.6，直线 l 分别截直线 a、b，得到 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$、$\angle 8$。根据不同顶点的两个角在直线 l(截线)与直线 a、b(被截线)的不同位置特点，你认为可以将哪些角归成一类？有几种不同的类型？

(1) 例如：①$\angle 1$ 与$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$、$\angle 8$ 中的哪一个角相对于截线和被截线的相对位置相同？②还有类似这样位置的两个角吗？若有，请全部写出来；③在已写出的各对角中，选其中一对角，将它所在的图形从原图中分离出来；④尝试用语言表述这类成对角的位置特征。

(2) 除了将相对位置相同的角归为一类外，①你认为还可以根据哪些成对的角关于直线 l(截线)与直线 a、b(被截线)有不同的位置特征，将他们归为一类？总共有几种不同的类型？请举具体例子说明；②在各类角中，将其中的一对角所在的图形从原图中分离出来；③尝试着用语言表述各类角的位置特征。

(3) 根据各类角的位置特征，尝试着给这几种类型的角命名。(思考后阅读教科书，解读其命名的根据)

本活动着重培养学生的直觉感知能力、按某一标准准确地进行分类的能力、想象能力、抽象概括能力及语言表述能力。

其次，应提供学生与文本互动的时间。它是学生与文本有效互动的保障要素。当学生与教师提供的文本(问题串)进行互动时，教师要关注学生自主探索的历程。一方面，由浅入深的问题串使得每个学生在同一时间里都有所事事；另一方面，由于学生的个体差异，使得他们难以在相同的时间段里完成同样的任务。因此，教师不能滥用时间，让学生无限制地“自由学习”，而应见机行事，切实把握好

有限的课堂时间，合理安排学生与文本互动的时间。这样，全体学生就有思考问题的机会，有发挥自己智慧解决问题的机会，有知道自己的思维障碍及知识缺陷的机会。有了这些支持，师生、生生在互动时，学生不但有思维的参与，而且有行为的参与，这样的互动将更具有针对性。

再次，为了更好地了解学生自主探索所反馈出来的信息，为互动提供有力的支持。根据教学内容，教师可要求学生将他的所思所想用书面形式表达出来。在学生与文本互动的时间里，教师应巡堂观察，不但要根据学生的书面反馈情况把握学生自主探索的时间，调整互动的主要内容，而且要关注学困生，发动优等生帮助学困生，实行一对一的互动，这样可避免学困生群体的增大，减少课堂教学中的负面因素。

3. 互动的内容要点

（1）预设中的问题

对预设问题的互动，不单要有预设问题的解决结果，还应该有其思维过程（怎样想）。由于数学教学目标不仅有结果性目标（知识与技能），而且有体验性目标（过程与方法，情感、态度、价值观），结果性目标的实现必须以体验性目标为载体，所以在互动中要加强数学思想方法的渗透，引导学生领悟具体内容所反应的数学思想，掌握解决具体问题的数学方法，并对解决问题的思维策略进行潜移默化的强化，从而提高学生的数学能力，培养学生的理性精神。此外，学生虽然能利用他们所掌握的信息来建构新知识，但是其意义往往与规范的概念并不一致，教师应引导学生获得规范的概念。

例如：对于相交线中的角的探索问题的互动，由于在学生与文本互动的时间里，教师已要求学生将思考的结果板书（板书采用自由式，谁先想完谁先上，其余同学作补充），经过几个学生陆续补充，探索的问题已比较完整地得到解决，但这并不意味着全班同学都会。此时，交流互动的重点应放在思维上（你是怎样想的）和表述的完整性上，对于重点字句需作解释和强调。在寻找其他类型角的时

候，为避免遗漏，应教给学生通法，即采用一对一的办法逐一筛查过去，如$\angle 1$分别与$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$、$\angle 8$的组合共有四种不同类型，$\angle 2$分别与$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$、$\angle 8$的组合可以归到前面得到的类型中，$\angle 3$分别与$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$、$\angle 8$的组合又产生两种新的类型，$\angle 4$分别与$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$、$\angle 8$的组合又可以归到前面得到的六种类型中。对于“用语言表述这类角的位置特征及根据各类角的位置特征，尝试给这几种类型角的位置关系命名”的互动，由于中国语言文字表意的多样性，使得学生的表达丰富多彩。然而，基于数学自身的特点，其数学概念的表述往往要求既简洁又准确，虽然初中的大部分数学概念是描述性的表述，但教师还是要通过点评来规范这些表述。相交线中的角涉及的名称较多，教师应结合各类角相互位置关系名称的含义让学生形象地理解其图形特征，以求准确掌握概念。

（2）学生反馈中的资源

在互动中，教师要真诚地倾听学生在课堂中的声音，尤其是学生的见解，要善于察言观色，体会和把握学生的思维动向，及时敏锐地从学生反馈信息中捕捉有效的教学资源，发挥教学机智，相机引导，互动生成。这里的生成资源可以是学生的错误认识，或者是学生的疑问、不成熟或不同的见解、不同的解决问题的思路。对于学生的错误观念、错误理解，应通过互动，剖析产生错误的原因，引发正确认识，实现认识上的知其然，并知其所以然；对于学生的疑问，要在互动中通过多种渠道（如讨论、举反例等），帮助学生解疑释惑。这样，便可让不同的见解在互动中达成共识，不规范的表述在互动中得以纠正，不同的解决问题思路在互动中得到共享。

例5 在“长方体的认识”的教学中，出现了一段关于“长方体棱数”的对话。

师：谁来说说长方体有多少条棱？

生$_1$：长方体有24条棱。（话音刚落，生$_2$在座位上迫不及待地喊到：不对！长方体有12条棱）

师：（师面向生$_2$）你能主动发言很好！但若让人家先把话说完，

再发表你的看法，那会更好。你说是吗？（$生_2$点了点头）请说说你是怎样想的？

$生_2$：我数出来的。

师：（教师再次面对$生_1$问）你呢？

$生_1$：我原来想，长方体有 6 个面，每个面有 4 条边，那么长方体就应该有 24 条棱。看来我错了。

师：（教师重复一遍）长方体有 6 个面，每个面有 4 条边，这种想法很有道理，但为什么会与事实（长方体只有 12 条棱）不相同呢？（教师面向全体学生）请大家仔细看看长方体模型中的棱的构成。

$生_1$：还应该将 24 除以 2。

师：大家明白他为什么要除以 2 吗？

$生_3$：因为长方体相邻的两个面相交于一条棱，也就是说长方体的每条棱都是两个相邻面的公共边，所以要用 $\frac{6\times4}{2}$。

师：通过这两种不同的解法，你们有什么体会？

$生_4$：我发现，求长方体有多少条棱根本不用数，只要用每个面上的边数乘面数再除以 2 就可以了。

师：说得太好了，真是一个爱动脑筋的好孩子，掌声鼓励。（全班响起了热烈的掌声）

师：这个方法不但适合长方体，也适合你们以后要学习的其他多面体。同学们真了不起，发现了一个求多面体棱数的公式。这应该感谢谁？

生：（齐）应该感谢$生_1$。

师：在数学学习中，我们不能只局限于通过直观感知图形来获得结论，还应该动脑筋思考，想一想能不能利用我们已学过的知识来解决问题，获得答案，从而获得一般性的方法。（学生点了点头）

这一精彩的互动片段是课前未曾预想的。正因为及时捕捉到来自$生_1$这一有价值的“错误”（长方体有 24 条棱），并为他提供一次解释的机会，才为全班学生搭起了交流互动的平台。通过互动，学

生不但澄清了错误的认识，而且发现了令人惊喜的求多面体棱数的公式。这样处理，不但保护了学生的自尊心，而且让错误变成了宝贵的学习资源。更重要的是，学生在互动的过程中，数学思维得到了锻炼和发展。同时，也使学生学会了倾听，学会了尊重别人，完善了自己的人格。

（二）在例、习题教学中创设有效互动的空间

例、习题教学中的有效互动应该建立在学生实战演练的基础上，有了学生的“做”，互动时才有学生思维的参与，才有可能达到巩固双基、培养能力、发展智力的目的。为了避免学生陷于题海之中，教师应充分利用例、习题的功能，切实做到练习中的有效互动。为此，教师应当做到以下几点：

1. 重组课堂的例、习题

例、习题教学是数学课堂教学的重要组成部分，分析、解题时不但要用到所学的知识和已形成的技能，而且要凭借已掌握的数学思想方法、已积累的解题经验，才能顺利地完成任务。反过来，解题又促进学生新技能的形成，使学生学会灵活应用新的知识和数学思想方法解决问题，丰富自己应对陌生背景问题的实战经验，形成自己对数学知识的理解和有效的学习策略。为了提高例、习题的利用率，教师必须根据教学内容和学生情况重组例、习题。由于学生已经历了知识的形成与发展过程，对所学的知识达到了基本理解的程度，对于知识的巩固与应用，教师不能让学生停留在简单模仿、机械重复的练习上。课堂例、习题的重组，题目不但要从易到难，而且要能反映数学思想方法和解决问题的策略，能以点带面。

例、习题以题组的形式由浅入深呈现给学生，不同层次的学生可以根据自己的能力作出选择，让自己在规定的时间里都能独立思考，尽心尽力地完成自己力所能及的任务，并有机会挑战极限，激发潜能。否则，题目一道道独立呈现，将会出现在同一时间段内一些学生提前做完而无所事事，一些学生才刚起步就被叫停的现象，导致各个层次的学生在原有的基础上都没有得到充分发展。

例 6　在《相交线中的角》的教学中，为了让学生不仅能巩固所学的知识，而且能灵活应用这些知识，教师精心改编了一组由浅入深并为后续学习做准备的习题：

（1）① 如图 4.7，∠6 的同位角是________，∠6 的内错角是________，∠6 的同旁内角是________；

② 写出图 4.7 中其他的同位角、内错角、同旁内角。

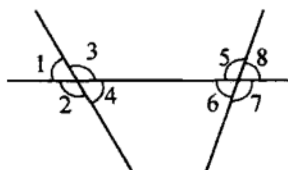


图 4.7

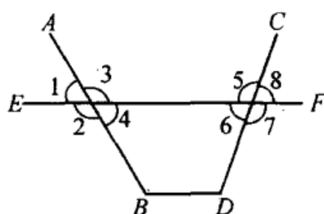


图 4.8

（2）如图 4.8，∠________与∠________是直线 EF 与 BD 被直线 CD 所截的内错角；∠4 与∠B 是直线________与________被直线________所截得的同旁内角。

（3）在图 4.9 中找出∠6 所有的同位角________；∠6 所有的内错角________。

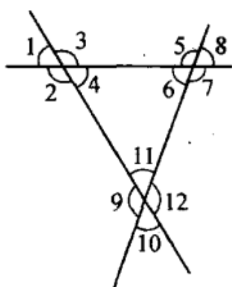


图 4.9

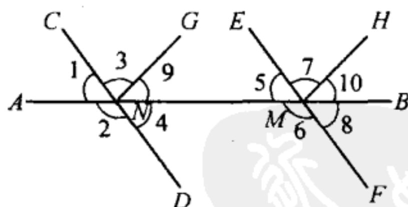


图 4.10

（4）① 如图 4.10，下列各对角中，哪些是同位角，哪些是内错角，哪些是同旁内角？

∠1 与∠5；∠3 与∠7；∠5 与∠4；∠3 与∠6；∠4 与∠6。

② 找出∠5 所有的同旁内角________。

③ ∠9 与∠10 是一对同位角，则形成这对角的两条被截线是________。

2. 为师生、生生互动作充分的准备

在学生与文本（如教师提供的题组）互动时，会出现同一道题有的学生会做，有的不会做；有的做对，有的做错；甚至还有不同的解法。为了节省展示、交流的时间，提高课堂时间的利用率，为互动做准备，教师可对学生作以下的要求：先做完者上黑板板书，后续的同学作补充。这种做法为缺乏解题思路的学生理解别人的解答提供思维的时间与空间，以填补自己的思维空缺。同样，在这段时间里，教师也应巡堂，不但要根据学生的反馈信息把握学生解题的时间，调整互动的主要内容，而且要组织提前完成任务的学生一起来帮助学困生。此外，教师巡堂中发现的典型错误也应让学生板演在黑板上，作为互动的重要教学资源。

3. 互动的内容

在学生已将不同的解题过程或典型的错误写在黑板上时，例、习题互动的重点是：

(1) 要求学生叙述其各种解题方法的思维过程。其间，教师要注意发现学生思维的漏洞，并加以引导；要善于发现学生的亮点，加以肯定；教师对于思维的关键点要做必要的复述，使教学面向全体学生。

(2) 点评学生的解题过程，借此规范学生解题的书面表述过程，使学生的表述步步有据，逻辑严密。

(3) 学生反馈中的差异资源，如学生的不同见解、学生的错误、学生解答中遇到的问题。

(4) 挖掘隐含在解题中的数学思想方法，以及运用这些思想方法解题的理由，以便学生能举一反三，触类旁通。

(5) 总结解题方法。

因此，例、习题的互动，是一个完善学生的思维，展示学生才华，实现共享的过程；是纠错解惑的过程；是规范学生解题步骤，体现逻

辑表述严密性的过程；是潜移默化地提高学生思维能力的过程；是让学生了解数学思想方法在解题中作用的过程。

例 7 在上一个例题《相交线中的角》的题组互动中，教师针对学生的解答进行点评时，应尽量从“怎样想”的角度进行思维方面的交流，让学生感悟如何解决问题，并从解题中提炼方法，总结出解题规律：

① 要找出图中的同位角、内错角、同旁内角，先要确定哪两条直线被哪一条直线所截，其次可以将这三线标识（如用不同的颜色或粗细），或将三线从原图中分离出来，其目的是去掉干扰的背景，突出本次研究的主要相关图形，最后由这三线找出同位角、内错角、同旁内角。

② 判定一对角是什么样的角（同位角、内错角、同旁内角），先要标识这对角所在的所有直线，其次确定出这对角是哪两条直线被哪一条直线所截而成的，最后根据概念给出这对角的名称。

三、给予适当的互动时间

互动需要时间，教师既不能为了赶着完成教学任务，变师生互动为教师的单向灌输，或教师与个别或少数学生的互动；也不能纠缠于一个无谓的问题，花费太多的时间等待学生自己找到答案。给予适当的互动时间，师生、生生的思维交流与碰撞才能实现，智慧的火花才能产生，并达到教学相长，否则，有效互动将成为无水之鱼。

第5章 数学课堂教学中如何“激趣”

第1节　对数学课堂教学中培养与激发学习兴趣的认识

一、学习兴趣与数学教学

教育心理学家认为兴趣是人们力求认识、探究某种事物或从事某种活动的心理倾向。学习兴趣是指一个人对学习的一种积极的认知倾向与情绪状态，是引起和维持人的学习注意力的一个重要内部因素。从对学习的促进来说，兴趣可以成为学习的动力；兴趣又是在学习活动中产生和发展的，从持续学习和学生的终身发展而言，兴趣可以作为学习的结果。

学习兴趣可以分为直接学习兴趣与间接学习兴趣两种。前者是由所学内容或学习活动——学习过程本身直接引起的，后者是由学习活动的结果引起的。间接学习兴趣具有明显的自觉性，当一个人意识到学习的社会意义或与自己的关系时，学习兴趣就随之产生。直接学习兴趣与间接学习兴趣常常是融合在一起的，随学习内容及学生个体差异而有所不同，两者难分主次。对学习的间接兴趣，在学习过程中很有可能逐渐转化为直接兴趣；而对学习的直接兴趣，若无特殊情况，大多能长期持续下去，并且愈来愈浓厚。实践

表明对学习的直接兴趣是提高学习质量最有利的因素。

《数学课程标准》明确指出：良好的个性品质主要指正确的学习目的、浓厚的学习兴趣、顽强的毅力。目的是根基，兴趣是源泉，毅力是保证，因而要让学生明确学习知识的目的与作用，以激发学生学习数学的兴趣，这对知识掌握是非常必要的。

著名教育家皮亚杰说过："所有智力方面的工作都要依赖兴趣。"学习兴趣的产生与教学有密切的关系。在数学教学中，培养与激发学生对数学学习的兴趣是数学教学的重要组成部分，教师运用兴趣在学生和数学知识之间架起桥梁，让学生通过桥梁进入数学大门，才能研究、探索数学知识，在实践中应用数学知识。

二、数学学习兴趣的培养与激发

兴趣的本质及其对学习的影响是一个古老而又崭新的话题，它是教育理论和教学实践所要解决的核心问题。教育家赫尔巴特把发展学生广泛的兴趣视为教育的主要目标之一，并认为主要是兴趣引起对物体正确的、全面的认识，它导向有意义学习，促进知识的长期保持，并为进一步的学习提供动机。杜威也是兴趣问题最有影响的理论家之一，1913 年出版了专著《教育中的兴趣和努力》，提出以兴趣为基础的学习结果与仅仅以努力为基础的学习结果有质的不同。

人的兴趣不是天生的，而是在后天的生活过程中逐渐形成和发展起来的。兴趣是以需要为基础的，虽然不是所有的需要都会产生兴趣，但是符合需要的事物，都可能引起人的兴趣；同时，兴趣又是通过实践活动而形成的，在实践活动过程中，总是不断发现问题并不断解决问题，也就不断产生新的需要，因而兴趣也就在实践过程中不断地形成和发展起来。因此，学习兴趣总是在求知需要的基础上发生，并通过学习的实践活动逐步地形成和发展。它既是过去学习的产物，也是促进今后学习的手段。

数学是抽象性和概括性高度统一的学科，学生在学习数学时极

易产生枯燥乏味的感觉，从而削弱乃至丧失学习兴趣。因此，在数学教学中培养学生的学习兴趣十分必要。下面是笔者在数学教学中培养与激发学生学习兴趣的思考与体会。

（一）建立融洽师生关系，营造和谐课堂氛围

教师要真诚地热爱学生。作为教师，只有对每一个学生倾注满腔的爱，学生才能充满信心、积极向上地学习，才能在师生互敬互爱的和谐气氛中产生学习的动力，才能有创新的灵感。作为教师，应该发扬教学民主的精神，不要用“唯书”、“唯师”的桎梏束缚学生的思想。传统的教学是教师讲学生听的单向信息传递的封闭式系统，教与学往往是在一种控制与被控制的状态下进行的。这种教学看似平静有序，实际上在平静的背后，隐藏的是学生非自主学习的无序状态。理想的课堂教学，必须使学生从被动的接受状态转变为富有强烈参与意识的互动状态，形成教与学相协调的动态、和谐的有序状态。学生学习数学总离不开思和问，教师对待学生的质疑，不可搪塞，当学生大胆阐述自己观点时，教师要发现他的闪光点，给予表扬；对于学生发表的不同见解，即使是错误的，也不该简单否定，而应让大家比较、鉴别、判断。通过学生的质疑，教师可以及时得到反馈，了解学生的认知情况，也促使自身教学能力的提高。在上述互动过程中，调动了学生的积极性，培养了学生良好的学习品质，让学生真正成为学习的主人，学生的思维也常常在这时候迸发出绚烂的火花。

亲其师才能信其道，任何一个成功的教师，都注重营造和谐的气氛，而和谐的气氛主要来自融洽的关系，这就要求教师除了具有较高的基本素质外，还应与学生建立良好的师生关系，只有师生共鸣才能使学生对数学学习产生浓厚的兴趣。

（二）创造性使用教材，开发教学资源

华罗庚指出：“就数学本身而言，也是壮丽多彩千姿百态、引人入胜的”。数学像一座绚丽多姿的百花园，数学教师应当一名出色的导游，当他对园中的一草一木、一亭一阁、一溪一径了如指掌，烂

熟于心时，他对游客要了解的情况才能娓娓道来，如数家珍；他才能引导学生漫游在数学大花园中，使他们在愉悦中得到激励，赞叹中产生兴趣，达到心旷神怡，流连忘返的境界，从而积极投入到数学学习中。

1. 课堂引入要有悬念

良好的开端是成功的一半。每节课开始，教师若能结合实际，巧妙的设置悬念性问题，将学生置身于“解决问题”情境中，就可以使学生产生好奇心，吸引学生动脑筋思考。例如在学习《直角三角形》时，可设疑：如何测量大树、铁塔、大山的高度和湖泊的宽度？将生活实际问题引入课堂，迅速点燃学生的思维火花，使学生认识到数学知识的价值，产生学习的兴趣。又如在学习《平面直角坐标系》一节的过程中，教师可先介绍数学家笛卡尔发明坐标系的传说故事，说明直角坐标系的创建，在代数和几何之间架起了一座桥梁，它使几何概念、图形性质得以用代数的方法来描述，从而将代数方法应用于几何学的研究。坐标方法在日常生活中用得很多，例如象棋中棋子的定位，电影院、剧院、体育馆的看台、火车车厢的座位及高层建筑的房间编号等都用到坐标的概念。随着学生知识的不断增加，坐标方法的应用会更加广泛。经上面有关坐标系背景的介绍，学生的兴致已经调动起来，便可适时进入该课题的学习。

2. 创设的情境要来自学生身边实际，具有数学教育价值

数学来源于生活实践，但数学的抽象性、逻辑性、严密性往往掩盖了它的实践性和趣味性。因此在数学教学中应尽量联系实际，选取典型的生活材料，让数学回到熟悉的生活中，使学生产生强烈的求知欲，提高学生的学习兴趣，从而提高学习积极性。

例 1 在学习《相似三角形的判定》前，教师可以先给学生讲一个故事：古希腊有个哲学家泰乐斯旅行到埃及，在一个晴朗的日子里，埃及伊系神殿的司祭长陪同他去参观胡夫金字塔，泰乐斯问司祭长：“有谁知道这金字塔有多高？”司祭长告诉他：“没有人知道，古书中没有告诉这个。”泰乐斯说：“我可以根据自己身高测出塔的高

度。”众人感到惊讶。说完，泰乐斯随即从白长袍下取出一条结绳，在他的助手的帮助下很快测出塔高 131 米。（教师讲故事的时候利用多媒体展示情景图片）故事讲完了，学生都产生了疑惑的眼光，兴致很高。接着老师问：“谁能说出他是怎样测出塔的高度的？”学生面面相觑，回答不出，这时教师顺势利导，告诉学生：下面将要学习的“相似三角性的判定方法”就能帮助你回答这个问题，等学完新课后，师生再回过头来思考泰乐斯测量金字塔高度的原理。这样一个持续的问题情境贯穿于整个课堂教学，激发了学生的思维，提高了学生学习的兴趣，同时也培养了学生应用数学知识解决实际问题的意识。

3. 题目变式，拓展延伸

古人说：“教人未见其趣，必不乐学。”因此，能否调动学生的学习兴趣，关系到教学的成功与否，只有当学生对其学习内容产生兴趣时，才会乐意去学，才会去积极思维，才会受教育于轻松愉快之中，这对学生的思想教育及提高教学质量都是行之有效的。

例 2 当初一学生对“求代数式的值”感到枯燥无味时，可给学生一点“兴奋剂”，给出题目：已知 $3x+2y+4z=23$，$2x+3y+z=12$，求 $x+y+z$ 的值。初学时学生不一定会求，可引导学生合作讨论，找出条件式与结论式的基本特征和相互联系，通过把两个条件式相加得到 $5x+5y+5z=35$，从而得到 $x+y+z=7$。这时学生会在解题方法的体验中愉悦情感，感受成功喜悦。此时再组织学生进入到具体问题中，如小王去超市买 3 件甲种物品，2 件乙种物品，4 件丙种物品，共付款 23 元；如果买 2 件甲种物品，3 件乙种物品，1 件丙种物品，应付款 12 元。问买甲、乙、丙三种物品各 1 件需付多少钱？这时学生不仅学到了知识，更重要的是掌握了方法，训练了思维，有利于创造性思维的培养。总之，新鲜感能吸引学生的注意力，趣味性能激发学生的好奇心。

例 3 在讲“二元一次方程组的应用”时，未知数的设法和相等关系的确定会使学生感到困难，此时可贴近生活选择学生较熟悉且

有趣的事例：一群小孩分苹果，如果每人分 5 个，则剩下一个；如果每人分 6 个，则差 1 个，问有多少小孩和多少苹果？学生置身于分苹果的活动中，引导学生分析题目中两个“如果”对应的关系，从而设有 x 个人，y 个苹果，得到方程组，使学生感受到现实生活中处处有数学，对问题感到亲切自然，增加学好用好方程组来解实际问题的信心。在此基础上，可采用变式训练的方法：某班学生外出旅游要住宿，如果每间房住 4 人，则有 11 人住不下，如果每间房住 6 人，则差 5 人才住满，问有多少学生和多少间房？同时还可提出新的要求：将这一问题改为具有相同数学模型的行程问题、工作问题等。创设上述的变式训练情境，学生能积极主动地参与，全身心进入“角色”，思维活跃，兴趣浓厚，从而达到了学一题会一类题的目的，思维能力及应用知识的能力相应得到提高。

4. 问题设置要有层次性、多样性

《数学课程标准》指出：“义务教育阶段的数学课程应突出体现基础性、普及性和发展性，使数学教育面向全体学生。”“数学教学活动必须建立在学生的认知发展水平和已有的知识经验基础之上。”

例 4 教师在“有理数乘方”一节新授课教学过程中，当学生初步学习了乘方概念和乘方的运算后，对解题跃跃欲试，这时教师可出示以下练习题：

比一比：看谁算得又对又快。完成后用简洁数学语言表述计算结果。

(1) $10^2=$ ________，$10^3=$ ________，$10^4=$ ________，$10^5=$ ________；

(2) $0.1^2=$ ________，$0.1^3=$ ________，$0.1^4=$ ________，$0.1^5=$ ________；

(3) $(-10)^2=$ ________，$(-10)^3=$ ________，$(-10)^4=$ ________，$(-10)^5=$ ________；

(4) $(-0.1)^2=$ ________，$(-0.1)^3=$ ________，$(-0.1)^4=$ ________，$(-0.1)^5=$ ________。

课堂上采用小组比赛的形式，调动学生的积极性和主动性，增强学生积极参与的意识和集体荣誉感，从中培养学生的观察和归纳能力。学生在合作交流与自主探索的过程中归纳出有理数乘方的符号法则，并为下节课的“科学记数法”做了铺垫。数学问题设置有层次，前后衔接，可谓“一举多得”。

（三）教学语言诙谐幽默，教学方式手段多样化

除了对教材知识本身的挖掘处理能激发学生的兴趣外，教师诙谐幽默的语言，选择适当的教学方法和手段同样能达到激发学生兴趣的目的。这也给教师提出了更高的要求，教师不仅要把握数学，精通数学，还要对相关学科的知识融会贯通，同时注重语言技巧的锤炼，做到动情之处让人荡气回肠，诙谐之处让人捧腹开怀，豪迈之处让人信心百倍，教师进入到“角色”之中，让学生的情感和思维随之波澜起伏，收到事半功倍的效果。

1. 适当地运用激励表扬，提高学习数学的热情

兴趣是带有情绪色彩的认识倾向。在学习中，学生如果获得成功，就会产生愉快的心情。这种情绪反复发生，学习和愉快的情绪就会建立起较为稳定的联系，学生对学习就有了持续的兴趣。正如原苏联教育家苏霍姆林斯基所说:“成功的欢乐是一种巨大的情绪力量，它可以促进儿童好好学习的愿望。”(《给教师的建议》)。教学中适当地运用激励表扬是引导学生行为习惯发展最有效的手段。当学生从自己的学习中体验到成功时，就会产生满足感，增强自信心，从而转化为学习的动力。在课堂教学中，恰当地使用“好极了”、“很好”、“你怎么想到的”等语言；在提问和板演时，尽可能为中下等学生提供表现的机会，找“机会”给予表扬；在讨论问题时，对于学生“小小的发明创造”给予及时肯定。上述种种做法，可让学生体验到成功的喜悦，产生愉快的情绪，从而升华为渴望学习的情感，提高求知探索的欲望。

2. 教学手段要直观化、形式多样

在课堂教学中，教师要注意把教学内容与教具、学具的演示和

操作结合起来，使抽象概念形象化。对低年级学生可将动作的表演与游戏形式结合在一起，让学生动手、动脑、动口，生动活泼地学习知识、理解概念、训练技能、开发智力，激发学习热情。

直观教学是数学课的一个特点。运用直观教学进行演示，能丰富学习感性认识，激发学生的学习兴趣。如讲解“生活中的立体图形”时，可以将课本、讲台、日光灯等作为教具；讲解“平行线”时，可以将窗的铁栏做教具，这样不仅能加深学生对知识的理解，使学生学得开心，而且有助于能力培养。再如，在教学“9＋2＝?”时，这是小学生第一次接触到进位加法的起始知识。第一步，指导学生按“凑十”的需要操作小棒，根据要把九根小棒“凑十”的需要，把两根分开成1根与1根，把其中的一根放在9根里凑成10根，再与剩下的1根合并成11根；第二步，让学生用出声的语言，较详尽地口述操作过程；第三步，要求学生脱离实物，通过表象默默地回忆操作的过程；第四步，引导学生压缩、简化说与想的口算过程。这样，通过动手和动口，学生很快理解和掌握了“凑十法”的算理。又如，在小学低年级教学应用题时，为了让学生充分理解“飞来、运来、开来、买了”以及“飞走、运走、拿走、开走、借走、卖了”等词语的含义，用实际表演等形式帮助学生理解，使学生认识这些词在题目中的作用。通过亲自表演，不仅大大激发了学生的兴趣，而且使他们在活动中学到了知识，应用起来准确无误。

同时，教学还要提倡自主探索、小组合作的学习方式，不断创设有意义的问题情境和数学活动来激励每一个学生独立思考，发表见解，倾听其他同学的不同意见，在小组交流、合作中达到共同获取知识、发展能力的目的。如在“拼积木”活动中，学习小组通过合作交流、讨论，拼成的形状各种各样。教师再加以点拨和鼓励，学生在宽松、和谐的氛围中萌发了创新意识。在“随意拼”活动中，让学生利用各种实物和立体模型，发挥自己的想象力，拼出自己喜欢的东西，学生在无拘无束的氛围中拼出了火车、大炮、坦克、长颈鹿、机器人等物体形状。这样的实践活动较好地体现了“数学来源于生活实

际”，使学生在尝到学习乐趣的同时，又激发了求知的欲望。

现代化的教学手段为素质教育注入了新的活力。教学中利用多媒体，把相关的数学知识通过音像播放出来，更能达到激发情趣的目的。合理地使用现代信息技术，有利于对数学语言文字、符号、图形、动画、实物图象、声音、视频等教学信息进行有效的组织与管理，能使过去难以实现的教学设计变为现实。从学生的学习方式看：现代信息技术可以为学生创造出图文并茂、丰富多彩、人机交互、及时反馈的学习环境。学生在课堂上通过简单的操作，即可观察到一些有启发性的实验现象，并从中感悟到一些规律性的结论，每个学生都能参与探索，并能有所发现，大大提高了认知效率，因而现代信息技术改变了学生获得数学知识的方式，拓宽了学生获得数学知识的途径。计算机辅助教学可以为抽象的问题提供直观的背景，使复杂的“数”通过“形”来表示，为数学活动提供了探索的平台，为构建现代的数学教学提供了技术支持，使得数学思想容易表达，数学方法容易实现，数学与现实的联系更加密切。

学生学习兴趣的激发培养是一个持久的工作，在当今素质教育的浪潮中要求教师向 45 分钟要质量，就必须注意培养学生的学习兴趣、情感、个性和意志。

第 2 节　数学课堂教学中“激趣”的案例分析

兴趣是学生学习的源动力，学生学习的大部分时间都在课堂上，增加课堂教学的趣味性，激发学生课堂学习的兴趣，可以调动学生学习积极性、主动性，引发学生的学习热情和求知欲望。日常课堂教学中“激趣”的主要方法有情境激趣、语言激趣及情感激趣等多种方法。下面以实例加以阐述。

一、情境激趣

《数学课程标准》指出，数学教学中，教师要创设适当的问题情境，鼓励学生发现数学规律和问题解决的途径，使他们经历知识的形成过程。这要求教师必须认真钻研教材，了解学生的实际情况，精心创设问题情境，激发学生的探究热情。

例 5 创设生活情境问题

"合并同类项"一节教学时，设计情境如下：

情境 1 星期六，小明陪妈妈去超市买了许多物品：青辣椒 1 斤、红苹果 1 斤、青苹果 1 斤、西红柿 2 斤、茄子 1 斤、帽子 1 顶、铅笔 2 支、鞋 1 双、笔记本 5 本，回到家后，妈妈让小明统计所买物品的数量并放到相应的地方去。如果你是小明，你打算怎样做呢？

设计意图：从学生熟悉的生活实例创设情境引入，一方面让学生体会数学来源于生活，另一方面激发学生的求知欲，调动学生的积极性；同时根据学生的不同做法，说明不同的分类标准对结果有不同的影响，渗透分类思想以及"同类"的含义，为探索"同类项"的概念及合并法则埋下伏笔。

情境 2 某校开展"抗震救灾，爱心募捐"活动，我班男生共捐献衣物 160 件、文具 24 件、现金 90 元；女生共捐献衣物 120 件、文具 26 件、现金 92 元，请你统计一下我班共捐献了多少衣物、文具和现金？如果平均每件衣物折合人民币 a 元，文具折合人民币 b 元，那么，结果又如何呢？

设计意图：进一步体会"同类"的概念及合并的必要性。既回顾了字母表示数及代数式的意义等旧知识，又发展了符号感，为新课的导入做好铺垫。

例 6 创设数学情境问题

认知冲突是人的已有知识和经验与所面临的情境之间的差异所导致的冲突。这种认知冲突会引起学生的新奇和惊讶，并引起学生的注意和关心，从而调动学生学习的积极性。

有这样一道题目：如图 5.1，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=10$，$AB=4$，在 BC 边上有一动点 P(不包括 B、C 两点)。

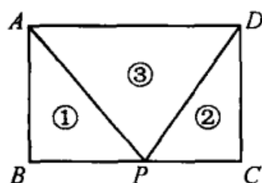


图 5.1

(1) 当点 P 运动到某一位置时，恰使 $\angle APD=90°$，问这时三角形①和②相似吗？请说明理由。

(2) 当点 P 运动到哪个位置时，三角形①和②相似？

(3) 如果设 $AD=a$，$AB=b$，当 a 与 b 满足什么关系时，能使图中三个三角形两两相似？

1. 问题的设计及解题思路的形成过程分析

问题是数学的心脏。合理的问题设置，有利于课堂教学的展开和深入。本题设计的三个问题遵循由浅到深、由特殊到一般的原则，体现了问题的开放性、多元性和探究性，从而使题目更具有挑战性，富有新意。

略解：(1) 因为 $\angle APD=90°$，可推出 $\angle APB$ 与 $\angle DPC$ 互余，从而推出 $\angle APB=\angle PDC$，可得出 $Rt\triangle ABP \backsim Rt\triangle PCD$。 (2) 分情况讨论：(情况一) 若 $\triangle ABP \backsim \triangle DCP$，应有 $\frac{AB}{DC}=\frac{BP}{CP}$。因为 $AB=DC$，所以 $BP=CP$，即 P 为 BC 的中点，则 $BP=5$。(情况二) 若 $\triangle ABP \backsim \triangle PCD$，应有 $\frac{AB}{PC}=\frac{BP}{CD}$，即 $PC\times BP=AB\times CD=16$。因为 $PC+BP=10$，所以 $BP\times(10-BP)=16$。解得 $BP=2$ 或 $BP=8$。

综上所述，当 $BP=5$，或 $BP=2$，或 $BP=8$ 时，三角形①和②相似。

(3) 问题中引入 $\triangle APD$ 与前两个三角形两两相似，而要 $\triangle APD$ 与它们相似，必须 $\angle APD=90°$。这既是问题(1)中的思维迁移，同时又加深了问题(2)的探究(可应用一元二次方程根与系数的关系来探究)，很好体现数形结合思想：要使三个三角形两两相似，应有 $BP\times CP=b^2$，且 $BP+PC=a$，则 BP、CP 是关于 x 的方

程 $x^2-ax+b^2=0$ 的两根。

要使方程有解，必须 $a^2-4b^2\geqslant 0$，由此可得 $a\geqslant 2b$。当 $a=2b$ 时，P 是 BC 的中点，三个三角形都是等腰直角三角形；当 $a>2b$ 时，存在如问题(2)中的两点。(这一情况也可以由"圆中的直径所对的圆周角是直角"来得到)

2. 问题的改造和延伸

通过上述问题的思考和探究过程，能使学生比较清楚地了解此类题型的解题思维，初步了解判断方法，如果对此问题进行改造延伸，会加深理解和掌握。例举如下的两题：

(1) 如图 5.2，$AB\perp BC$，$DC\perp BC$，$AB=8$，$DC=6$，$BC=14$，BC 上是否存在点 P，使 $\triangle ABP$ 与 $\triangle DCP$ 相似？若存在，求此时 BP 的长；若不存在，请说明理由。

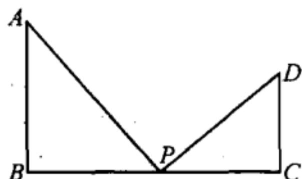


图 5.2

(2) 如图 5.3 所示，有一块塑料矩形模料 $ABCD$，长为 10 cm，宽为 4 cm。你手中有足够大的直角三角板 PHF，将直角顶点 P 放在 AD 边(不与 A、D 重合)上，在 AD 上适当移动三角板顶点 P。

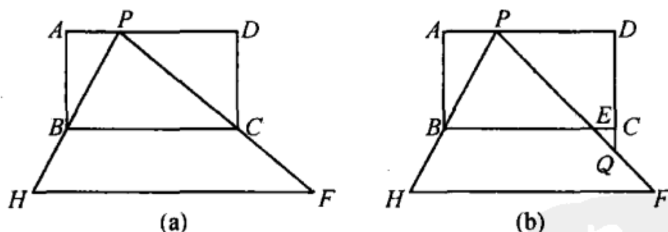


图 5.3

① 能否使三角板的两条直角边分别通过点 B、C(如图(a))？若能，试求 AP 的长；若不能，请说明理由。

② 再次移动三角板位置，使三角板顶点 P 在 AD 上移动，直角边 PH 始终通过点 B，另一直角边 PF 与 DC 的延长线交于点 Q，与 BC 交点 E，如图(b)，能否使 $CE=2$ cm？若能，求出这时 AP 的长；

若不能，请说明理由。

数学教学是思维活动的教学。几何问题作为培养学生思维能力的一种有效载体，应力求通过题目的演变和改造，引发思考与探究，寻找、比较解题方法，感悟问题的本质，从而发展思维，达到融会贯通，举一反三的效果。

总之，数学教学应紧密联系学生的生活实际，从学生的生活经验和已有知识出发，创设生动有趣的情境，引导学生观察、操作、交流等，使学生通过数学活动，掌握基本的数学知识和技能，学会从数学的角度观察事物和思考问题，激发对数学的兴趣以及学好数学的愿望。

二、语言激趣

语言是人们交流的工具，也是思维的基础。在课堂教学中，师生之间的信息交流主要通过语言来传递与沟通。

1. 教师要具有良好的语言表达能力及调控能力

语言表达能力对教师的工作具有特殊意义。教师传授知识、表达思想、以理服人等都要靠语言来表达。显然，教师语言表达能力的强弱直接关系到教学工作的成败。教师生动形象、富有鼓动性和感染力的语言可以激发学生的学习兴趣，调动学生的学习积极性。教师在课堂上，语言应该简洁明白，通俗易懂，同时又必须准确、规范；语速要快慢适中，富有节奏，既给学生留下思想活动的余地，又足以引起学生注意。

同时，教师需要注意，不要老是让学生被动听讲，更要重视学生的参与。任何教学活动都离不开活动的主体——学生，都是建立在学生的认知、情感、意志等心理活动基础之上的。教学活动中要让学生多动口、动手、动脑，真正成为学习的主体，培养课堂学习的主动性。所以，教师要敏感地捕捉来自学生的各种信息，及时作出调整，保持学生良好的心理状态，学生才会主动参与教学过程，成为教学活动的主体。教师把握信息准确，就会很好地引导学生，教学活

动的成效便高，学生学习兴趣盎然；反之，教师对信息把握不够好，或者师生信息交流太少，教师不管学生的状态和学习表现等，学生就可能丧失学习的兴趣，当然就没有效果可言了。

2. 语言的魅力无穷

前苏联教育家斯维特洛夫认为："教育家最主要的，也是第一位的助手是幽默。"因此，在课堂教学中，数学老师的每个风趣幽默的话语，精妙而诙谐的比喻和联想都会使学生惊奇、兴奋，产生浓厚的兴趣，激起强烈的求知欲。如教师可对枯燥的数学内容进行语言加工，将抽象概念用生动有趣、诙谐幽默的语言进行描述，这样既有助于学生理解、接受和记忆新知识，又可以激发他们学习数学的兴趣。如讲有理数的运算，学生往往不注意先确定符号，针对这种情况，教师幽默地说："有理数的运算，先问一问你的得数，有没有'姓'？若有，它是姓'正'，还是姓'负'。"把"符号"人性化，学生发出了爽朗的笑声，这样既使学生感到风趣幽默，又意味深长，自然也提高了学习兴趣，并引起注意。

善于运用肢体语言。成功的表演、直观的演示既能激发学生的兴趣，又有利于培养学生的观察能力和分析探究能力，有助于学生把通过观察现象得到的感性认识升华为理性认识。例如教学"方程组的应用举例——行程问题"，可让两名学生在黑板或屏幕上作模拟表演，其余学生观察：相遇问题中分二人同时不同速行驶和同速不同时行驶；追及问题中也按以上要求演示，尤其是绕圆周运动的情况，通过观察演示现象，更有利于理解其数量关系，正确列出方程（组）求解。

三、情感激趣

心理学研究表明：情感是教学艺术魅力形成的关键因素，具有感染与迁移的功能，以及扩散与泛化的规律。所以，教师除了要优化课堂教学外，还要学会以情动人、以情育人，从而以情感创设和谐的环境，从而激发学生的学习兴趣。

1. 用爱心、关心、热心、恒心感染学生

成语"爱屋及乌"比喻爱一个人会连带到与他相关的事物。同样，如果学生对老师产生良好的情感，则一定会迁移到这位老师所教的学科中，形成一股积极的凝聚力量。因此，老师应当从思想、生活、学习上关心学生，了解他们在想什么，需要什么，有什么困难；了解他们的生活习性、学习特点和兴趣爱好，建立融洽的师生关系，使学生"亲其师，信其道"。尤其是学习基础及能力较差的学生，长期被自卑所困扰，教师应当更多地注入爱的香醇，使他们的心理保持平衡。在教学中，对他们不歧视、讥笑、挖苦，相反，他们有困难，应热忱帮助；他们有进步，应及时表扬，使他们生活在"希望"之中，从内心激起上进的欲望。

2. 让学生参与教学过程

新课标力求使学生认识数学是人类生活、劳动和学习必不可少的工具，体验数学活动充满着探索与创造，感受数学的严谨性和完美性。因此，教师在课堂教学中，应努力让学生多动手、多实践，培养他们的创新精神和实践能力。让学生对于数学知识，能从活生生的社会背景、生活经验中找到，加强学生对数学知识的理解、应用，使学生在深化知识的形成过程与更广泛的空间中体验数学的乐趣，发掘数学的价值，从中提高自身的数学素养，达到真正的学以致用。

新课改教材中有很多内容贴近生活，比如每章前的"导言"部分，章节中的"看一看"、"读一读"、"想一想"、"做一做"、"课题学习"等栏目，都能较好地培养学生的创新精神和实践能力，教师在教学中应予以高度重视。近几年的中考或高考试卷中出现了许多构思新颖、贴近实际生活的考题，给予我们很多的启示。因此，教师应重视发挥这些教材的示范作用，尽可能再现数学发现的基本过程。引导学生把数学知识与实际联系起来，形成用数学的意识，引导学生寻找自己身边的数学，如营销策略、股票、银行利率（利息税）、足球与数学等涉及到千家万户利益及学生感兴趣的问题，培养学生的应

用意识。

教师应鼓励学生将实际问题转化为数学问题，构建数学模型。例如，在学习全等三角形的判定、平行四边形的性质、圆的性质等内容时，教师都可充分引导学生动手操作，通过平移、旋转、翻折等方法让学生在操作中观察、探索新知识。此外，还可采取开设应用数学讲座，组织学生参加社会实践等方法，提高学生应用数学的能力。例如，在学习“解直角三角形”这一章后，可组织学生测量墙高、旗杆高；在函数最大、最小值的教学中，也可组织学生到工厂参观，了解企业的生产、销售问题，使学生理解成本、产值、利润、费用、利税、平均增长率等的意义。这样做，一方面调动学生学习数学的积极性，另一方面也培养了学生解决实际问题的能力。

影响学生学习兴趣的因素是多方面的，培养学生学习兴趣的途径和方法也是多样的。在数学课堂教学中，教师要根据自己和学生的实际情况，联系教学内容，结合具体实例，做到“识趣”：找出问题及现实中的趣味点；“引趣”：把带“趣味”性的问题和方法引入课堂；“激趣”：适时激发学生的兴趣，引导学生参与学习讨论。通过激发兴趣，激活教学活动，以趣促学，从而收到数学课堂教学的高效益。

第 3 节　几点建议

新课改的核心理念，就是将应试教育的“知识为本”的思想转变为适应素质教育的“以人为本”、“以学生的发展为本”的思想。在这种新的教育理念的指导下，教育将极大地关注“人的发展”。要实现这一目的，就要在教学过程中充分挖掘学生本身这一“内因”，极大地调动学生学习的主动性和积极性，逐步培养学生的学习兴趣，让学生变过去的“被动学习”为“主动学习”。作为一名中学数学教师，如何在自己的教学实践中，让学生“主动学习”，更好地培养学生学

习数学的兴趣呢？笔者认为，要掌握和处理好以下几点：

一、真正落实学生的主体地位

传统的应试教育中，学生在教学活动中处于被动应付的地位。在这种状况下，学生的主观能动性被完全抹杀，久而久之，学生当然对学习不会产生浓厚的兴趣。要改变这种状况，教师在教学活动中就必须真正落实学生在教学活动中的主体地位。

1. 建立平等民主的新型师生关系

新理念下的师生关系应该是“充分体现着尊重、民主和发展精神的新型的师生伦理关系”。教师和学生之间是平等的朋友和伙伴关系，教师要充分尊重每一位学生，把学生当作一个独立的人格主体来看待；要改变过去居高临下的心态，使自己在教学活动中真正成为学生学习的促进者、组织者和指导者。

2. 真正实现“三位一体”的教学目标

“三位一体”的教学目标是指“基本知识和技能、过程和方法、情感态度与价值观”。这一目标的确立是非常重要的，因为学生的学习活动不仅仅是获得知识和能力，更是伴随着学生的思维过程和学习方法，伴随着学生的情感体验和态度、价值观，三者之间是密不可分的整体关系。要使学生的主体地位得以实现，就必须努力实现这一教学目标。

3. 切实转变学生的学习方式

新课改要改变原有单一、被动的学习方式，建立和形成旨在充分调动和发挥学生主体作用的多样化的学习方式。转变学习方式，要以培养创新精神和实践能力为主要目的；要注重培养学生批判意识，鼓励学生对书本的质疑和对教师的超越；要积极引导学生从事实验和实践活动，培养学生乐于动手、勤于实践的意识和习惯；要大力提倡开展自主学习、探究学习、合作学习，让学生充分体验学习的乐趣。

二、教师要自觉提高自身素养

教师自身素养对学生具有巨大的感染力和影响力。教师要不断提高自身素养，加强自身学习，才能适应新课改对教师的要求。

1. 加强业务学习

课程的改革是一个不断发展、永不停歇的过程，新教材强调各科之间的沟通与综合，这就要求教师不断更新自己的观念，加强自身的业务学习，及时更新知识结构，掌握并恰当运用互联网等新技术，全面拓展和提升个人的整体修养。

2. 提高人格魅力

新教材十分重视学生的创新意识、科学精神、服务社会的使命感和责任感等品质的培养。这就要求教师必须具有良好的道德品质和严谨的治学态度。教师只有提升自己的人格魅力，才能感染和激励学生。

3. 改进教学艺术

新课程强调培养学生的创新精神与实践能力，大大加强了探究式学习的比重，允许学生对问题有自己独特的见解，这就要求教师在实践中要为学生发展个性留出充分的空间，多研究学生，改变教学方式和备课方式。教师对自己的教学应进行认真的反思，努力改进教学艺术，采用灵活多样的教学方法，面向全体，分类指导，调动学生学习的积极性和学习热情，使"不同的人在数学上得到不同的发展"。

4. 开发和利用各种课程资源

课程资源是指有利于实现课程目标的各种因素。教师不仅是课堂教学的实施者，更应是课程资源的开发者。教师要开发和利用好各种课程资源，以满足学生的学习需求，激发学生的学习兴趣，最大限度地提高教学的效能。

(1) 教材是重要的课程资源。新教材在引起学生的兴趣和便于自学方面下了功夫，应认真研究和处理好新教材，激发学生的学

习兴趣。教师不应受某一种版本教材的局限,要借鉴不同版本教材的长处,开发有利于学生学习的教学内容。

(2) 积极开展研究性学习活动,使学生经历"问题情境—建立模型—解释、应用与拓展"的解决问题过程,发展自己的思维能力,获得一些研究问题的经验和方法。根据当地实际和学生情况,可因地制宜地开发其他课程资源,如乡土教材、校本教材、德育基地等。

5. 改革对学生的评价方式

对学生评价的目的是为了促进每一位学生的发展。要构建多元化发展性的数学课程评价体系,对学生学习水平的评价既要关注学生学习的成果,更要关注学生的学习过程;要将形成性评价和终结性评价结合起来,既要关注学生学习数学的水平,更要关注学生在学习活动中表现出来的情感、态度和创新精神。对学生评价的转变需要一个较长的摸索过程。目前,要做好以下几点:

(1) 新课程的评价功能主要是激励、反馈与调整,更加关注学生多方面的发展潜能。因而,考查的重点应是基础知识、基本能力和思维方法。要改变考试的方式,将书面考核和能力考核结合起来,将闭卷考试和开卷考试结合起来,将教师评价和学生自我评价结合起来。要淡化考试的结果,给每一位学生以学习的自信心。

(2) 对学生的评价不应只将目光盯住学生的不足,而要肯定学生的进步,关怀和鼓励学生,树立学生学习的自信心。教师不仅要尊重学生,更要学会赞赏学生。要赞赏每一位学生的特性、兴趣、爱好、专长;要赞赏每一位学生所取得的哪怕是极其微小的成绩;要赞赏每一位学生所付出的努力和所表现出来的善意;要赞赏每一位学生对教科书的质疑和对教师的超越。教师的鼓励要致力于从内心激起学生学习数学的兴趣。

第6章 中学数学教学要注意揭示数学的本质

第1节 数学的本质是什么?

新课程标准理念提出:"形式化是数学的基本特征之一,在数学教学中,学习形式化的表达是一项基本要求,但不能只限于形式化的表达,要强调对数学本质的认识,否则会将生动活泼的数学思维活动淹没在形式化的海洋里……"

然而,数学的本质是什么呢?这是个不断变化的问题,对这个问题众口纷纭,没有一个统一的答案。

人们从不同的角度看数学,便对数学的本质有不同的认识:从数学的学科结构看,数学是模型;从数学的表现形式看,数学是符号;从数学对人的指导看,数学是方法;从数学的应用价值看,数学是工具;从数学的过程看,数学是推理与运算;从数学的文化角度看,数学是一种基本的文化素养。从数学的学科特点看,数学具有三大特征:高度的抽象性,逻辑的严密性与结论的精确性,还有应用的广泛性。从数学的学术形态看,数学是经过逻辑加工的严谨的演绎系统,形式枯燥,给人一种冷冰冰的感觉。但从数学的教育形态看,数学却蕴含着"火热的思考"和"生动的过程"——本章将要论述的重点就在于此。

第 2 节　为什么中学数学教学要注意揭示数学的本质?

数学来源于生活,又应用于生活。数学的发展表明对数学"完全形式化"是不可能的,数学与生活的联系日益密切,数学的探索过程越发凸显,生动活泼的数学思维活动越应该为学生所认识和体验。因此,数学教学应该努力揭示数学概念、法则、结论的发展过程和本质,揭示人们探索真理的艰辛与反复。要通过典型例子的分析和学生自主探索活动,使学生理解数学概念、结论产生的背景和逐步形成的过程,体会蕴含在其中的思想,体验寻找真理和发现真理的方法,追寻数学发展的历史足迹。

目前,参加数学课程改革实验的教师正热情高涨地投身于这场伟大的变革,努力实践新课标的理念。但在热闹非凡的表象下,不要忽视这样的现象:有些情景或活动仅仅追求表面的轰轰烈烈,却未能准确地揭示学习内容所蕴含的数学本质。

例 1　在直线的倾斜角与斜率的教学中,一则教案设计中有这样的几个情境:"情境 1:如何确定一条直线的位置?""情境 2:用一个很小的等腰直角三角板,能不能画出一个很大的正方形的对角线?怎么画?""情境 3:我们用什么样的几何量来刻画直线的方向? 你想怎么定义?""情境 4:日常生活中还有表示直线方向的量吗?""情境 5:什么是坡度? 它和倾斜角有什么关系?""情境 6:什么是直线的斜率?"

这个教学设计的情境丰富,也体现互动,似乎很好地落实了新课标。但是,我们细心地一想,它们并没有揭示出斜率最本质的两点:"与倾斜角一一对应"和"恰是表示直线的一次项系数",非常可惜! 为此有人不禁要问:为什么不用倾斜角的正弦或余弦作斜率呢? 它们本质上有什么不一样?

值得注意的是在我们日常教学中,无意中偏离数学本质的的教学现象并不罕见,这说明我们从事数学教学的教师有时不能非常清楚地把握"数学的本质",而且在日益活跃的教学活动中,数学的本质有可能被下列倾向所掩盖:

一、过度追求课堂上探究活动所呈现的热闹场面,导致教学效率低下和数学本质缺失

有一个教学情景:让全班同学抛硬币,每人各抛 50 次,再一个个相加,以此求硬币正面朝上的概率。这个情景虽然很热闹,但却忽视了频率趋近于某个稳定值的过程,又忽视了频率和概率的本质区别。这样的情景只是形式上的花架子,既浪费了时间,又没有揭示数学的本质。

二、由于生活现象与数学本质不一致而束手无策,人为把生活与数学割裂开来

数学是从现实世界中抽象出来的,它来源于生活,又应用于生活,这正是数学的本质之一。但学生面对生活化的数学问题,往往习惯于从已有的生活经验出发进行思考,一旦出现生活现象和数学本质不一致,就不知如何处理。如"由刘易斯跑 100 米用了 10 秒,推出他跑 400 米用了 40 秒"是对还是错?面对这样的问题,有的教师陷入两难境地,甚至空泛地强调生活与数学有区别。由于没有认识到数学是对模式的研究,是在一定的条件下求解问题的,所以无法正确处理这类问题。又有个例子:某地今年水稻亩产 1000 斤,每年增长 10%,20 年后亩产是多少?算出来约是 6727 斤,完全错误呀!岂不是数学出了问题?事实上,从数学的本质看,这是前提不真导致结论荒谬。这个例子恰恰说明了粮食的增长不可能是几何级数,如果教师能对这个问题加以引导拓展,便是一堂相当优秀的课;如果没有,并以此抨击数学,那便是败笔。

三、大量的时间花在解题和讲题上，以“题海战术”代替理性精神的培养

应试教学下把学生看成解题的机器，埋头讲题，贪多求全，强调记忆，忽视知识和方法的形成过程。倘只以操练代替创新，以经验累积代替理性思考，则学生永远不会清楚解决问题的思路是如何形成的，解决问题的方法是如何构想的，只能养成善于模仿而不善于思考的习惯。这样的教学中数学方法和规律的形成被人为地忽略，待揭示的数学本质没有得到凸显。

新课标强调了数学的发展是一个充满观察、实验、归纳、类比、猜测和反思的探索过程，这种强调十分必要。但是，我们还应该认识到，数学不同于物理、化学等其他实验性科学，仅仅有上述探索过程还不够，数学还有它自己的特色，即数学的思维方式，数学以其抽象性及其公理演绎系统，为学生提供了一个逻辑推理的平台，中学数学教学应该是思维的教学，应该逐步引导学生养成理性思维的习惯，培养数学的理性精神。

第3节　中学数学教学怎样呈现数学的本质？

我们的教科书是经过逻辑加工的演绎体系，呈现为“概念——公式或定理——范例”组成的学术系统。准确的定义、逻辑的演绎、严密的推理被形式地印在了纸上。从中看不到概念的形成过程及思维过程，看不到数学发现和创造的真实经历，看不到数学家艰辛反复的数学探索，而只看到完美的结论。至于它们是如何产生的，对学生来说有一种说不出的神秘感。因此，数学教师的职责在于返璞归真，在符合教育心理规律的前提下揭示数学发现的过程和本质，更有效地把数学的学术形态转化为数学的教育形态，切实做到

“平易近人,感悟真情”。

一、展示过程,融会贯通数学概念

新课标强调数学教学应当使学生对数学概念的本质得到理性认识。数学概念是数学基础知识的核心,是数学推理和论证的要素,也是学好数学知识和培养数学能力的关键,因此,搞好数学概念的教学具有十分重要的意义。

然而,尽管新课标强调了概念的重要性和基础性,但现在有的老师仍然存在着“重解题技巧,轻概念教学”的倾向,有的教师还刻意追求概念教学最小化和习题讲解最大化,实际上这是应试教育下典型的舍本求末。这样会使得学生出现两种倾向:一是认为概念学习单调乏味,不重视它,不求甚解,导致对概念的模糊认识;二是对基本概念死记硬背,没有理解,只是机械记忆。结果导致学生在没有真正理解概念的情况下,匆忙去解题,使得学生只会模仿老师解决某些典型的题型和掌握某类特定的解法。一旦遇到新的情况、新的题目就束手无策。进而导致教师和学生为了提高成绩,陷入无边无际的题海之中。

数学概念的教学关键是概念的引入和辨析,新课标指出:概念教学中要引导学生经历从具体的实例抽象出数学概念的过程。因此引入数学概念,要以具体的典型材料和实例为基础,揭示概念形成的背景,帮助学生完成由材料感知到理性认识的过渡,并引导学生把背景材料与原有认知结构建立实质性的联系。

例 2 “数列极限”的概念,可从战国时期庄周提出的“一尺之竿,日取其半,万世不竭”引入。让学生将每天剩余的木棍长度和已砍去的木棍长度写成两个数列,并把它们的各项标在数轴上,引导学生归纳两个数列的共同点特征:(1)都是无穷数列;(2)随着项数的无限增大,数列的项无限趋近于一个常数。从而引出数列极限的定义。

对概念定义后,还必须让学生掌握概念的内涵和外延,帮助学

生内化概念，建构新的知识体系。因此，教师要引导学生仔细阅读概念的定义，对定义旁敲侧击。例如引进数列极限的概念后，要引导学生抓住关键字词“无限增大”、“无限趋近”和“某个常数”逐一加以分析，进而让学生观察一些具体数列是否存在极限，再由此得到相关结论。有时还要通过变式、对比、应用和引申来加深对概念的理解，促进融会贯通。

二、联系实际，回归数学本源

数学的高度抽象性是数学的本质特征之一，正是这个特征使得许多学生不理解数学，从而害怕数学，对数学“畏而远之”。因此，新课标十分强调数学与现实生活的联系，在教学要求中增加了“使学生感受数学与现实生活的联系”，“数学教学必须从学生熟悉的生活情景和感兴趣的事件出发，为他们提供观察和操作的机会”，使他们体会到数学就在身边，感受到数学的趣味和作用。

在数学课堂中，我们可以用活生生的实例来说明抽象的数学概念或数学问题。譬如我们把空间直角坐标系中点的竖坐标比作“海拔”，让学生形象地理解了竖坐标，从而大大减少了平时计算中的失误。当学生不能理解为什么“$x(x-1)\leqslant 0$”是“$|x-1|\leqslant 2$”的充分条件时，我们先让学生分析“我是福建人”是“我是中国人”的什么条件，学生即对前一个问题恍然大悟。函数的周期性是个比较抽象的数学概念，我们充分估计到学生初学时的困难，于是先让学生研究一个问题：今天是星期一，过七天是星期几？过七十天呢？过一万天呢？让学生发现所研究的问题蕴含规律性，然后教师才提出这种规律性就是今天要学习的周期性。教学“归纳推理”时，我们也是从一些实例引入的，如，“小明第一天早上起来看到太阳是从东边升起来的，第二、三、四天早上起来又看到太阳从东边升起，于是小明认为太阳每天总是从东边升起来的”；“小明第一天早上迟到，第二、三、四天早上又迟到，于是大家认为小明每天都是迟到的”（学生会意地笑起来），教师指出这就是“归纳推理”，“这种推理得出的结论

具有或然性”。教学“数学归纳法”时，我们用实例“有一列学生，第一个是高三年级一班的，以后每个都与前一个同班，你能得出什么结论?”教师指出：这种推理方法就是数学归纳法。诸如此类，抽象的数学被形象化、生活化了，这不仅降低了数学的抽象度，降低了数学教学的起点和坡度，而且有利于加深学生对数学本质的理解。

三、理性探索，感悟数学精神

新课标特别强调对学生创新意识和创造能力的培养。在数学课堂中学生除了学习到应有的知识以外，更要发掘他们的创造潜能，实现具有人文价值的创造与创新。而这些都要以理性的探索、求真、质疑作为坚强的依托。理性的探索具体表现在面对新的问题情境，能合理地选择有效的手段和策略，灵活应用所学的知识与方法进行探索研究，理清解决问题的思路，又准又快甚至是创造性地解决问题。

例 3 已知 $f(x)$是偶函数且在$[0,+\infty)$上是增函数，如果$f(ax+2)\geqslant f(x-4)$ 在 $x\in[1,\ 2]$ 时恒成立，则 a 的范围是(　　)。

(A) $(-\infty,\ -5]$　　(B) $[1,\ +\infty)$

(C) $[-5,\ 1]$　　(D) $(-\infty,\ -5]\cup[1,\ +\infty)$

这是学生感到困难的题目，于是我们启发学生注意从题目的四个条件依次进行探索，让他们发现解题最关键的是先从 $f(x)=f(|x|)$ 和 $x\in[1,\ 2]$ 这两个条件入手，可以把问题转化为 $f(|ax+2|)\geqslant f(|x-4|)$ 在 $x\in[1,\ 2]$ 上恒成立，进而简化为 $|ax+2|\geqslant 4-x$ 在 $x\in[1,\ 2]$ 上恒成立。进而抓住 a 的本质含义对 a 讨论，注意到 $y=|ax+2|$ 的图象过定点$(0,\ 2)$，再利用数形结合求得问题的解(选 D)。此外，作为选择题，也可以把 $f(x)$ 特殊化为 $f(x)=x^2$，再从选项提供的信息采用特殊值验证排除法求解。选择题的解法灵活多样，不要都当作解答题来做，求解时不要受表面现象所迷惑，要透过现象，深入本质，奇思妙想，才能又快又简得出

正确答案，这就是数学精神的具体表现。

选择题要重视选项的提示作用，解答题也是如此，要重视问题和结论的提示作用，才有明确的求解目标、方向。

例4 如图6.1，已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$F$为右焦点，若$AB$为垂直于$x$轴的动弦，直线$l:x=4$与$x$轴交于$N$，直线$AF$与$BN$交于点$M$。求证：点$M$恒在椭圆$C$上。

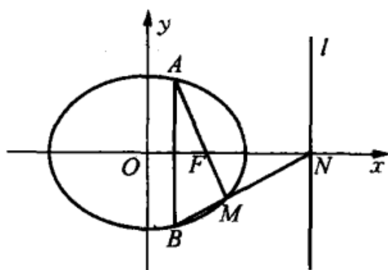


图6.1

许多学生解答此题耗费了大量时间但无功而返。事实上，解决这个问题需要理性思考，因为问题涉及到焦点和准线，所以可考虑椭圆的第二定义，用几何法证明：

（思路一）如图6.2，设$AB\perp x$轴于D，作$AA_1\perp l$于A_1，$BB_1\perp l$于B_1，$MM_1\perp l$于M_1。设$\angle ANF=\angle 1$，$\angle BNF=\angle 2$，$\angle ANA_1=\angle 3$，$\angle BNB_1=\angle 4$。

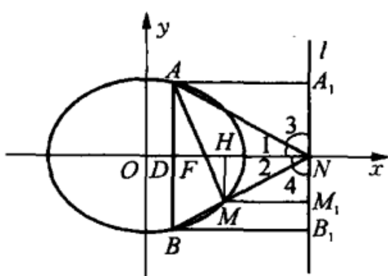


图6.2

依题意可得$\angle 1=\angle 2$，则$\angle 3=\angle 4$，$\triangle MM_1N\backsim\triangle AA_1N$。所以$\frac{|MM_1|}{|AA_1|}=\frac{|MN|}{|AN|}=\frac{|MF|}{|AF|}$（角平分线定理）。由$\frac{|MF|}{|MM_1|}=\frac{|AF|}{|AA_1|}=e$可知点$M$在椭圆上（椭圆的第二定义）。

（思路二）如图6.2，作$MH\perp ON$于H，显然$\triangle MHF\backsim\triangle ADF$。由思路一中已有结论，有$\frac{MH}{AD}=\frac{MF}{AF}$，$\frac{MH}{AD}=\frac{MN}{AN}=\frac{MM_1}{AA_1}$，则$\frac{MF}{AF}=\frac{MM_1}{AA_1}$，所以$\frac{MF}{MM_1}=\frac{AF}{AA_1}=e$。

例5 已知椭圆离心率$e=\frac{1}{2}$，焦点$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，直线

$y=2\sqrt{6}(x-c)$ 交椭圆于 A、B 两点，线段 AB 的中点到右准线的距离是$\frac{200}{33}$，求椭圆方程。

如果设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，和直线 AB 的方程联立，整理得 $(24a^2+b^2)x^2-48a^2cx+24a^2c^2-a^2b^2=0$，之后计算之繁可想而知。但利用 $e=\frac{1}{2}$ 可看出关键是求 c，可从 c 突破。可设椭圆方程为 $3x^2+4y^2=12c^2$，和直线 AB 的方程联立，整理得 $33x^2-64cx+28c^2=0$，从而线段 AB 的中点横坐标 $x_0=\frac{32c}{33}$，由$\frac{a^2}{c}-x_0=\frac{200}{33}$得 $4c-\frac{32c}{33}=\frac{200}{33}$，解得 $c=2$，故所求方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$。

四、寻根究源，彰显数学文化

传统的数学课堂，对知识、技能的教学极为重视，而对人文的内容则较少关注。其实，让学生发现、探索、学习到新的知识与方法固然重要，但与此同时，介绍有关的背景文化，让学生欣赏先哲的探索、求知过程，纵览人类在数学求知历程中的执着、反复与艰辛，未尝不能起到一种震撼和激励的教育效果。比如在虚数单位 i 的引入前，介绍数的产生、发展、扩充的不同寻常的经历；在教学立体几何中锥体和球的体积公式时，有意识地展现中国古代数学家祖冲之和祖暅的研究经历，展现体积公式产生的等积转化过程，让学生感知数学成果的来之不易。又如在学习等比数列的求和公式时，先让学生研究经典的“六十四格棋盘上的米”怎样算？“阿基米德和乌龟赛跑的问题”怎样解释？以此濡化学生的数学文化意识，激发学生对数学的兴趣。

其次，数学文化不仅表现在知识本身，还寓于它的历史。著名数学家霍格本曾经说过：“数学史实际上是与人类的各种发明与发现、人类经济结构的演变以及人类的信仰相互交织在一起的”。因

此有必要让学生更多地去了解它，使得数学学习成为名副其实的文化传播。通过对数学史的了解，不仅有助于了解世界数学宝库中中外数学家令人神往的成就及其为科学锲而不舍的精神，更重要的是通过了解数学惊心动魄的发展历程，探索先哲的数学思想，有助于感知数学发展的规律，指导数学的学习，预测数学的未来。

五、适当包装，丰满数学形象

数学强调逻辑，但一味的逻辑演绎，会令人产生厌倦之感。因此，数学教师要透过演绎的现象看清概念的本质并进行适当的包装，让数学的形象变得丰满起来，有骨有肉，回归本源。

例 6 证明不等式$\frac{(a+m)}{(b+m)}>\frac{a}{b}$，其中$a$、$b$、$m$均为正数且$a<b$。如果把$a$看成糖的质量，$b$看成糖水质量，则$\frac{a}{b}$表示糖水的浓度；$m$看成在糖水中新加入的糖量，则$\frac{(a+m)}{(b+m)}$表示加糖后的糖水浓度，糖水加糖以后更甜了。比起抽象的证明，学生更能理解其本质。如果$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}$两边分别代表两杯不一样浓度的糖水，它们倒在一起，甜度会怎样呢？结论是$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}<\frac{a_2}{b_2}$。这里，给数学合理的包装，数学的本质得到了更好的体现。

六、实施美育，陶冶数学情感

数学的精神还表现在对数学美的欣赏与追求。数学中存在的美，主要体现在“对称美”、“简洁美”、“统一美”、“奇异美”等，会审美的人对它心醉神迷，不会审美的人对它望而生畏。美育问题早已为世人所瞩目，但是如何实施美育，特别是如何在数学教学中实施美育，并以此激发学生的兴趣与爱好，陶冶学生对数学的情感，从而优化数学教学，仍是个值得深入探究的问题。

数学课堂中常常力求用简洁的语言表达复杂的事物，用直观的

图形描述抽象的概念，用不同的方法对同一问题进行研究而得到同一结果，其中都蕴含了丰富的审美情趣。对数学美的发现与挖掘，必然能让学生在赏心悦目中与数学结下不解之缘，他们的数学精神也会在追求美的过程中得到濡化与升华。

我们近年来观摩的一些数学公开课，有的教师十分巧妙地运用多媒体展示圆锥曲线的形成过程，展示数形结合的解题过程，这不仅仅使抽象的数学可视化了，而且充分挖掘了数学课的审美因素，收到了很好的教学效果。有一位教师在教学三角函数的图象时，首先用几何画板画出了正弦曲线、余弦曲线，然后绘声绘色地把正弦曲线、余弦曲线比喻“像一座座整齐匀称的小山，连绵起伏，周而复始，无始无终”。然后再将两者叠合到同一坐标系中，把它们比作“像两条狂奔的巨龙在追逐戏闹，好一幅活生生的双龙戏珠图啊”。后来在教学正切曲线时，在用几何画板画出了图象后，就让学生自己来形容：“正切曲线像什么?”有的学生说“正切曲线像无数多条缓缓的流动小溪，无声无息，源远流长”；“像从天而降的瀑布，飞流直下，一泻千里!”经过这样的比喻和形容，三角函数的图象活起来了，美起来了，学生对他们的周期性、单调性、无限延展性的理解也就容易多了，同时对这些曲线产生了特有的情感。因此，在数学教学中不失时机地展示数学美，不仅能唤起学生的审美意识，而且能触发学生的各种联想，产生创造性思维，培养创新精神。难怪有人感慨：“会审美的人在倾心审美中受教，不会审美的人在枯燥的题海中煎熬”。

七、注重三基，突出教学重点

国际著名数学家和数学教育家费赖登塔尔认为，从本质来看，数学是系统化了的常识。数学是一个有机的整体，数学的各分支、各个知识点是紧密联系的，数学思想方法以各个知识点为截体，对数学知识起着指导和统率作用。基础知识、基本技能和基本的数学思想方法是数学的核心，它在整个知识体系中起着主干的作用，它

是数学的本质内容，也是考查的重点内容，又是对学生的终身学习影响深远的数学内容。“三基”过关，学生才会具有灵活多变的能力，才能形成有序的知识体系。

我们常发现，学生平时对“三基”的学习是零散的、孤立的，认识是片面或有缺陷的。因此，有必要阶段性地对“三基”进行归纳梳理，在前后联系的教学中多花功夫和时间。要帮助学生回忆、整理“三基”内容，及时发现问题，拾遗补缺，并适当提高，使学生对学过的内容有新的理解和认识，帮助学生形成有序的知识体系，阶段性完成知识板块的重新组合，并在新的理解中使学生的思维能力，认识问题、分析问题和解决问题的能力得以提高。平时教学不要陷入题海战术，要注重通解通法，不刻意追求解题技巧。要注意“三基”的延伸作用，抓住牵一发动全身的重点内容，精选题目，然后讲细、讲透，做到水到渠成，突破难点，切实提高学生的能力。

例 7 在函数值域的复习中，我们对双勾函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ $(a>0)$ 给予特别的关注：

(1)用函数的图象理解它的单调性和最值；(2)用求导数的方法理解它的单调性和最值；(3)用不等式的方法理解它的最值；(4)用不同的条件去理解它的适用范围；(5)用解有关双勾函数的不同类型的综合题体现“三基”的作用。

例 8 在学生容易出错的基本运算中注重“三基”，如，①$x\in[0,3]$，求 $y=x^2-2x+2$ 的值域；②$x\in[-a,b]$，且 $a>0$，$b>0$，求 $y=\frac{1}{x}$ 的值域；③$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，求 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值域。

对上面三道题，我们提出用图象法写出值域，并作详细讲解。虽然花的时间多，但由于重点突出，学生掌握较好，在以后碰到类似练习，反而节约了时间。

八、架桥平坡，降低数学难度

高度抽象性是数学的本质特征之一。正是这一特征使许多学

生不理解数学，从而害怕数学，学不好数学。对此，教师在教学中要用形象的语言，合适的比喻，在新的抽象概念与学生原有知识结构及思维能力间架设桥梁，并让学生意识到数学的抽象是相对的。

事实上，数学的抽象是分等级的。普遍的常识由经验上升成规律后，实际问题变为数学模型后，就成为抽象的东西。当这些抽象的规律一旦被人们掌握后，又成为普通的常识，即又作为认识更高层次的数学的基础(常识)，如此继续便形成了数学的逐层抽象。比如自然数 1，2，3 …是抽象的数字，谁也说不清楚“1”具体指什么，而只能从“一棵树”，“一个人”，“一粒球”去体会“1”的意思，但 1，2，3 …一旦被人们掌握后，它又变成常识，又成为人们认识更抽象数学的基础。中学阶段也一样，作为高中教师不必再讲“什么是等边三角形”，“为什么 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$” 等内容，因为它已是高中学生的常识。因此，数学教学的关键是如何将学生正在学习的抽象度较高的数学知识，降低它的抽象度，使学生容易理解，帮助学生把这些知识转化为学生的常识。这种教学模式在高一年级的数学教学中显得特别重要，它能帮助学生处理好初高中过渡的数学学习问题，使学生顺利地进行高中的数学学习，处理好了，高中的学困生就少了，处理不好，高中的学困生就多了。

例 9　对高一学生来说比较抽象的两个题目：

① $y=f(x+1)$ 是偶函数，则 $y=f(x)$ 必有一条对称轴________。

② $f(3x)$ 的定义域是 $[2,3]$，则 $f(2x-2)$ 的定义域是______。

这两个题目学生一直感觉很抽象，又无从思考。但教师若在讲解时，举出两个学生熟悉的例子：$f(x)=(x-1)^2$ 和 $f(x)=\sqrt{x-6}+\sqrt{9-x}$，学生就容易理解多了。事实上，这两个例子的举出是把数学的抽象度降低了，使学生容易理解，从而更顺利地解决问题。

在高三的数学复习中，学生必定会碰到一些抽象性和概念性

强、思路灵活或操作难度大的题目。许多学生在这些题目前束手无策，教师讲解后收获甚少，之后碰到类似问题仍难于独立解答。因此，许多教师便认为讲难题的效果不好，做难题主要靠学生自己的努力，对一些难题不讲或少讲。事实上，这些难题更需要教师的精心讲解。只要教师精心设计，善于借助相关实例、图形，以学生易于接受的语言去降低这些难题的抽象度，大部分学生都可以接受并从容应对。

例 10 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^+)$。

(1) 求数列$\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列$\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1}4^{b_2-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}(n\in\mathbf{N}^+)$，证明：$\{b_n\}$ 是等差数列；

(3) 证明：$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$。

本题的第(2)、(3)小题通常被认为是难度较大的题目。在分析探求解题思路和反思时，教师可作如下的提示和归纳，同时注意让学生去体会和总结。

讲解(2)时，可把它概括为“两次多写一项相减”，也就是把由 S_n 求 a_n 的思路用两次而已。

讲解(3)时，可这样归纳：因为放缩的目的是为了方便求和，而便于求和的常见数列有：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots$$

只要拿着这些数列去尝试，把它看成放缩的目标，常常会找到解题思路。

平时要有意识培养学生积极自我暗示，自信乐观，不畏艰难，体验和获得解题的轻松感和成功感。每一节课都要提出一些问题让学生感到有“想头”(即让学生跳一跳，够得着)，学生解题才会有“劲头”；同时在解决问题后尝到“甜头”，学生就会在这“三头”之间保持充沛的学习热情，锲而不舍。

九、灵活变式,增加开放问题

数学教学不能只停留在一些演算规则和解题技巧的教学上,最本质的还是进行能够让学生终身受益的理性思维能力的培养。一般来说,数学学得好的人理解力、思维力、分析力、判断力、想象力和创造力都比较强,这说明数学教学对提高公民的文化素养意义深远。为了适应时代的要求,数学教学应当在提高思维能力和创造能力方面多做一些开拓性的研究,比如教学中的数学问题应该突破封闭体系、减少机械模仿、淡化特殊技巧,增加探索性、开放性的数学问题教学。

开放性问题是数学教学中的一种新题型,相对于有明确条件和结论的封闭题而言,通常是指条件不完备、结论不确定、解题策略多样化的题目。目前中学教材中开放性的问题较少,课本例题、习题基本是为了使学生理解和掌握数学结论而设计的封闭题。这容易使学生在学习过程中产生以死记硬背代替主动参与,以机械模仿代替智力活动等问题。为了改变这种窘况,教师除在教学过程中注意增加变式题、综合题外,还要适当设计一些开放性的问题,为学生提供更多主动探究与合作交流的机会,促进学生创新能力的发展。

数学开放题可以来源于课本的封闭题:有时可把条件、结论完整的题目改成给出条件,先猜结论,再给予证明的形式;有时可改成要求运用多种解法或得出多个结论的题目;有时把题目的条件、结论拓广,使其演变成一个发展性问题,或先给出结论,再让学生探求其成立的条件。

例 11 椭圆基本知识教学之后,设计开放题:"如图 6.3,椭圆的中心 O 是原点,F 是左焦点,A 是左顶点,R 是上顶点,l_1、l_2 为准线,l_1 交 x 轴于点 B, P、Q 两点在椭圆上,$PM \perp l_1$ 于 M, $PN \perp l_2$ 于 N, $QF \perp x$ 轴干 F,请你用图中两条线段的比来表示椭圆的离心率。"

这个问题的结论是丰富多彩的,学生在探索并交流后发现,能

表示椭圆离心率的线段比可以有 $\frac{|FO|}{|AO|}$，$\frac{|FO|}{|FR|}$，$\frac{|PF|}{|PM|}$，$\frac{|AF|}{|AB|}$，$\frac{|QF|}{|BF|}$，$\frac{|AO|}{|BO|}$，……从而思维的火花被点燃，探索问题的积极性被调动起来，由此获得了对椭圆的定义及其性质较深刻的认识。

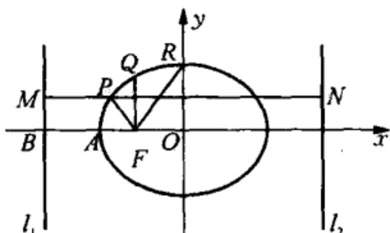


图 6.3

例 12　如图 6.4，过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点 F 作直线交双曲线于 A、B 两点，且 $|AB|=4$，那么这样的直线有几条？

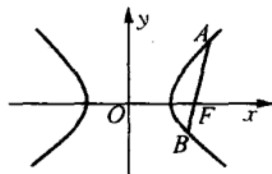


图 6.4

这是高二数学教材的一道普通题。如果只让学生单纯解答这道题，学生的收益是不大的。但是，如果不断改变题目的条件，让学生思考：①若 $|AB|=1$，有几条直线？② 若 $|AB|=2$，有几条直线？③ 若 $|AB|=3$，有几条直线？④ 若 $|AB|=5$，有几条直线？学生对问题的认识就会比较全面和深刻。

反过来，如果隐去条件 $|AB|=4$，只给出结论，让学生探究使结论成立的条件，效果又会如何呢？下面是笔者的教学片段：

教师提问：如果满足条件的直线有且只有两条，那么这个条件应该是什么呢？让学生探索……

学生猜测并发现了条件是：$2<|AB|<4$。

教师进而要求学生："你能证明这个猜测吗？"

在教师点拨下，学生发现了解答问题的关键是要证明两个命题：(1)若 A、B 都在右支上，当且仅当 AB 垂直于 x 轴时，$|AB|$ 的值最小；(2)若 A、B 不都在右支上时，当且仅当 AB 垂直于 y 轴时，$|AB|$ 的值最小。进而验证并修正上述猜想。

这样，学生对问题的探究被一步一步引向深入，从而发现了问题的实质，抓到了解决这类问题的要害，同时培养了学生的创新精

神和科学态度。

例 13 高中数学教材中有如下题目："过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 F 作一条直线和此抛物线相交于 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 两点，求证：$y_1 y_2 = -P^2$。"若将其结论隐去，便得到一个开放性问题："过抛物线 $y^2 = 2px$ 焦点 F 作一条斜率为 k 的直线和此抛物线相交于 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 两点，你能得到关于弦 AB 的哪些结论?"然后引导学生从四个层面进行思考和探究，从而可得到一系列结论。

(1) 基础层：将 $x_1 + x_2$，$x_1 x_2$，$y_1 + y_2$，$y_1 y_2$ 和弦 AB 的长分别用含 k、p 的代数式表示。

(2) 应用层：当 k 变化时，求：①线段 AB 中点的轨迹方程；②$\triangle OAB$ 重心的轨迹方程；③原点 O 在直线 AB 上的射影 H 的轨迹方程；④$\triangle OAB$ 面积的最小值。

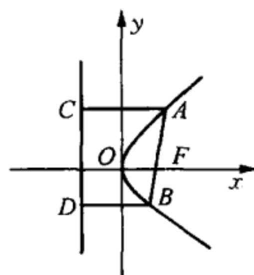


图 6.5

(3) 提高层：如图 6.5，分别过 A、B 作抛物线准线的垂线，设垂足分别为 C、D。①以线段 AB 为直径的圆与直线 CD 有什么关系? ②以线段 CD 为直径的圆与直线 AB 有什么关系?

(4) 深化层：在前面的结论中，寻找直线 AB 过焦点 F 的一个充要条件，并加以证明。

通过对这些结论的探索，学生不断有所发现，有所创新。各层次学生都得到了成功的体验。

可见，数学开放题体现数学问题的形成过程，体现解答对象的实际状态。数学开放题可以为学生探索和准确认识自已提供时空，便于因材施教；也可以促使学生善于发现问题和分析问题，藉以培养学生的创新精神和创造能力。因此数学开放题用于学生的探究性学习意义深远，这是一种新的教学理念的具体体现。

十、有机渗透，把握数学思想

中学数学教育应加强渗透数学思想方法的教学，这已成为当今

数学教育工作者的共识。如果说数学问题是数学的心脏，那么数学思想方法就是数学科学的精髓、灵魂。数学教学应建立在数学思想方法的感悟及应用的基础上，学生掌握了数学思想方法，就能从整体和本质上把握数学，优化思维品质，从而终生受益。就是说，学生即使把数学知识忘记了，但数学的精神、思想和方法也还会深深地铭刻在头脑中，并长久地在学习、工作、生活中发挥积极的作用。数学思想方法是对数学事实、数学概念、数学原理与数学方法的本质认识。它从属于哲学思想方法和一般的科学思想方法，它是数学中具有奠基性、总括性的基础部分，因此，把握数学思想，有助于我们更好地把握数学的教学与研究。

例 14 已知一次函数 $f(x)=ax+b$，$1<f(1)<2$，$2<f(2)<3$，求 $f(3)$的范围。

学生常出现错解："由 $f(1)=a+b$，$f(2)=2a+b$，得 $1<a+b<2$，$2<2a+b<3$，从而 $-2<-a-b<-1$，$2<2a+b<3$，从而 $0<a<2$，$-1<b<2$，又 $f(3)=3a+b$，从而 $-1<f(3)<8$。"而正确的答案是 $2<f(3)<5$（可画满足两已知条件的直线族，利用数形结合思想求得）。

上述错误解法源自不等式变形中的"不等价转化"，由于学生没有很好把握数学的"等价转化"与"不等价转化"思想，从而使所求范围扩大了。借此时机，我们强调了把握数学思想的重要性。

例 15 写出不等式组 $-1<\frac{1}{x}<2$ 的解集。

学生容易出现错解：$-1<x<\frac{1}{2}$，理由是把三个数都倒过来。错在哪里呢？

错误的原因在于学生杜撰了命题"若 $a<b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$（也有记作$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 的）"，但它是假命题，这是学生学习不等式性质的负迁移。

（分析一）用转化的思想看：原不等式组可化为 $\begin{cases}\frac{1}{x}>-1,\\ \frac{1}{x}<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+1>0,\\ \frac{1}{x}-2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1+x}{x}>0,\\ \frac{1-2x}{x}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-1 \text{ 或 } x>0,\\ x<0 \text{ 或 } x>\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$ $x<-1$ 或 $x>\frac{1}{2}$。

（分析二）用函数的思想看：设 $y=\frac{1}{x}$，原不等式表示已知函数 $y=\frac{1}{x}$ 的值域 $(-1,2)$，要求定义域，运用数形结合的思想，答案不算自明。

（分析三）用分类的思想看：原不等式组可化为 $\begin{cases}x<0,\\ \frac{1}{x}>-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\ \frac{1}{x}<2,\end{cases}$ 解得 $x<-1$ 或 $x>\frac{1}{2}$。

数学思想方法是中学数学教学的重要内容之一。任何数学问题的解决无不以数学思想为指导，以数学方法为手段。把数学知识的精髓——数学思想方法纳入基础知识范畴是加强数学素质教育的一个重要举措。随着对数学思想方法教学研究的深入，必将进一步提高数学教学质量。

我们的数学教学，不能仅仅限于教会学生解题，更应该让学生通过解题，明白了数学原理，学会数学的思维，领悟数学精神。一节好的数学课，犹如一段美妙的旋律，给人以一种美好的体验。中学数学教学应该呈现数学的本质，应该跳出题海，回归本源，切实提高学生的数学素养，实现“知识与技能，过程、方法与解决问题的能力，情感、态度与价值观”三者的和谐发展。

第7章 数学课堂教学中的“真情实境”

第1节　数学课堂教学中经常出现的“假情虚景”

一、教师上演“解题独角戏”

教师刚出示一道数学题，不待学生思考片刻，便立即破题和解答。学生听了教师精彩的讲解，看了教师“一帆风顺”的解答过程，固然会为老师的成功而赞叹。然而在赞叹之余，学生似乎还感到“味”犹未尽，思绪茫然，对解题思路知之甚少或一无所知，在日后的问题解答中仍然困难重重，对教师已讲过的同样类型题目的解答还是一筹莫展。

二、提问中“暗示”替代“启发”

教师为体现“启发式”教学的热闹场面，在课堂上频频提问学生，但一遇到不合自己口味的回答，便或者喊其“打住”，或者另外提问那些可能会说出“正确答案”的同学。为了使课堂提问能顺利进行，一切顺着事先设计好的线路推进，教师往往尽力让设问条件趋于明显，一再暗示诱引，希望尽快听到“投己所好”的回答。

三、课堂气氛刻板，小组讨论形同虚设

整节课气氛“肃穆”，纪律“严明”，维护着严格的甚至苛刻的课堂秩序。教师一问某个数学概念、定义，全班同学便众口同声，一起朗读；教师吩咐小组讨论，学生们则前后座合拢，四五人在一起“交流”，但仔细观察，其中口、脑俱动者寥寥，许多小组仅见一两个“组长”动口动手，其他同学各忙各的，并没真正参与小组学习和讨论活动。

上述几种情景，严重阻碍课堂教学效率的提高。

为何在数学课堂教学中经常会出现“假情虚景”而教师却“乐此不疲”？如何在数学课堂教学中让学生多见到教学的“真情实境”，多展示思维的真实活动过程，摒弃假象，学到真知？下节提出几点思考与做法。

第 2 节　数学课堂教学的返璞归真

一、让课堂教学呈现出民主合作、求索探源的真情实境

（一）在解题教学中让学生经历思维的全过程

众所周知，解题教学是数学课堂教学的重要内容。学习数学若仅能机械记忆若干数学定义、定理、公式，却不能应用已学知识去解决问题，则无异于“入宝山而空返”。而在教学实践中，教师并非解答问题的“万能者”，往往对一些难度较大的题目，特别是学生“冷不防”提出的一些数学问题，不能立即作出完整的解答，或者需要搜集有关“参考资料”，寻求“参考答案”；或者需要苦苦思索，经过一番探讨后才获得成功，最后，如释重负地回答了学生的询问，但在课堂演示或向学生展示的解题过程中却常常略去自己解决问题时所走的弯路与受到的挫折。殊不知，如果教师能开诚布公，把自己解题的

真情实境介绍给学生，让学生看到问题解决的来龙去脉，知其然亦知其所以然，这样非但不会损伤教师的形象，还会让学生从心底里佩服教师的治学治教精神，同时，还对优化学生的思维品质，培养学生良好的心理素质起着莫大的作用。在这方面，古今中外的许多学者名人是我们学习的典范。例如，华罗庚先生主张对学生提出的问题当场答疑，当场推理，即使碰壁也无妨，这样可把自己走弯路的经验教训告诉给学生。他在回忆自己的老师时特别推崇美国数学家维纳，维纳讲课时“铤而走险”，使人担心这位学者“会挂在黑板上”，但随着问题解决的逐渐深入，就像把扎实的研究工作从书桌上搬到黑板上，不但教了内容，更主要的是教了科学的思想方法，学生的得益已超越了知识本身。大数学家希尔伯特的老师富克斯习惯于在课堂上现想现推，有时把自己置于困境中，再突围出来，希尔伯特由此看到了老师高明的思维过程，有力地促进自己思维能力的提高。上世纪九十年代初，李政道博士在中国科技大学的讲台上深深地怀念他在芝加哥大学求学时教授们的教学风格——真实展现老师“从失败走向成功”的过程，他认为是这种教学方法培养和造就了他，并把此风格称为“芝加哥风格”。

《义务教育数学课程标准》中指出：“数学教学活动必须建立在学生的认知发展水平和已有的知识经验基础之上。教师应激发学生的学习积极性，向学生提供充分从事数学活动的机会，帮助他们在自主探索和合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法，获得广泛的数学活动经验。”因此，教师在讲解习题时，应当注意解题思路的探索过程、解题方法和规律的概括过程，使学生在这些过程中展开思维，从而发展他们的能力。

如何在课堂教学中充分展现出解题过程的真情实境呢？以下列举几个具体教学例子进行分析探究。

例 1 在一堂初三数学复习课中，一位教师列举该市前年的一道数学中考题进行解析：

已知抛物线 $y = x^2 + 4x + m$（m 为常数）经过点$(0, 4)$。

(1) 求 m 的值；

(2) 将该抛物线先向右、再向下平移得到另一条抛物线。已知这条平移后的抛物线满足下述两个条件：它的对称轴（设为直线 l_2）与平移前的抛物线的对称轴（设为直线 l_1）关于 y 轴对称；它所对应的函数的最小值为-8。

① 试求平移后的抛物线所对应的函数关系式；

② 试问在平移后的抛物线上是否存在着点 P，使得以 3 为半径的⊙P 既与 x 轴相切，又与直线 l_2 相交？若存在，请求出点 P 的坐标，并求出直线 l_2 被⊙P 所截得的弦 AB 的长度；若不存在，请说明理由。

本题源于教材，“入口宽”而“步步高”，解答过程中渗透了丰富的“函数与方程”、“运动变化”、“数形结合”、“分类讨论”等数学思想。该教师在讲述此题的解法时可谓条理清楚，娓娓动听，但对解答过程中的一些关键地方，如第(2)问中第①小题平移后的抛物线具有什么特征，怎样确定它的函数关系式，第②小题⊙P 的位置应如何确定（宜先从“相切”角度入手，分圆心 P 在 x 轴的上方、下方两类情况讨论，再从“相交”角度入手对所得点 P 的坐标进行取舍）等部分，却舍不得留时间让学生动脑动手自行进行探讨，或让学生将研究结果与同学、老师交流。尽管这节复习课该教师看似完成了教学任务（能具体介绍此题的解法过程，甚至还能余下时间讲解其他例题，让学生做一些练习），但笔者认为教师并没充分发掘本例题的效用，其苦心传授的解答内容并没有让学生很好地吸收。学生在听了此题的解法介绍后收获甚微，他们今后在解决有关“直线与圆的位置关系”、“函数性质”、“图形变换”、“分类讨论”等问题时还会遇到较大的障碍。

例 2 笔者曾经讲过一道习题：解方程 $(x-1)(2+\sqrt{x^2-2x+4}) = 2x(2+\sqrt{4x^2+3})$，当时自己花费不少时间探讨解题途径，或者用将方程两边同时平方去根号的方法，或者使用换

元法，都因运算过于繁杂导致无功而返。后来经过仔细观察方程特点后，将原方程化为 $(x-1)(2+\sqrt{(x-1)^2+3})=2x(2+\sqrt{(2x)^2+3})$ (*)，终于茅塞顿开：令 $y=f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})$，易知 $y=f(t)$ 为单调递增奇函数，由(*)式得 $f(x-1)=f(2x)$，$\therefore x-1=2x$，解得 $x=-1$。试想在课堂教学中，如果掐去自己在解题中的"失败经历"，不待学生思索，便径直介绍出自己经一番思考后才得到的解题诀窍 —— 构照函数 $y=f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})$，利用函数的单调性解决问题，这样学生只是吃到"现成饭"，缺乏"做饭实践"，看不到解题过程中蕴藏着丰富多彩的思想方法与解题规律，今后遇到类似的问题，还是束手无策。

例 3 在讲解一道数学问题"已知 $a+\lg a=10$，$b+10^b=10$，求 $a+b$ 的值"时，教师可先让学生充分思考，发表各种解题意见，还可"不耻下问"，"与生为伍"参与解答过程。这时课堂上必然出现各种生动的解题场面。例如，有的学生会想到通过"换元"、"指数式与对数式互化"等途径，类似上例构造函数，再利用函数单调性来解决问题：令 $\lg a=b'$，则 $a=10^{b'}$，由条件可得 $10^{b'}+b'=10$ 且 $10^b+b=10$。注意到 $y=10^x+x$ 为单调递增函数，则 $b'=b$，即 $a+b=a+b'=a+\lg a=10$。当然上述这种纯代数的解法是较难想到的，如果学生对此题的解决仍然束手无策，这时你可特意与学生一起备尝"解题受挫"的滋味（实际上这种滋味你或许在备课时早已尝过），在"山穷水尽疑无路"之时，可能有的学生（如果没有，那你权且充当这个角色）会指出另一途径，用"数形结合"思想构造函数图象解决问题，可在同一直角坐标系中作函数 $y=\lg x$，$y=10^x$，$y=-x+10$，$y=x$ 的图象（如图 7.1），则 $y=10^x$ 与 $y=\lg x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。函

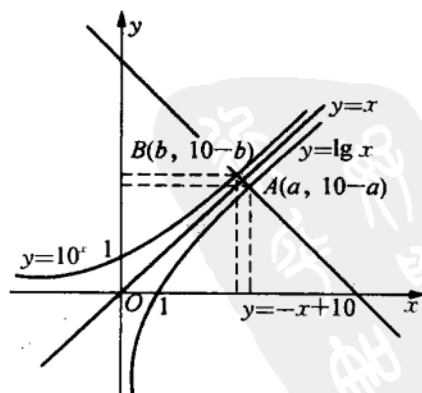


图 7.1

数 $y=10^x$ 与 $y=\lg x$ 皆为单调递增函数，而 $y=-x+10$ 为单调递减函数，故可设直线 $y=-x+10$ 与 $y=\lg x$ 的图象相交于点 A，与 $y=10^x$ 的图象相交于点 B，由条件易得 $A(a,\ 10-a)$，$B(b,\ 10-b)$。因为直线 $y=-x+10$ 与 $y=x$ 垂直，故 A、B 两点关于直线 $y=x$ 对称，所以 $10-a=b$，即 $a+b=10$。苦尽甘来，问题终获解决，师生必定沉浸在解题成功的喜悦之中。

例 4 许多初中老师都讲述过这道几何习题："如图 7.2，河对岸有灯塔 AB，在 C 处测得塔顶 A 的仰角为 30°，向塔前进 14 米到达 D 处，在 D 处测得塔顶 A 的仰角为 45°，求灯塔 AB 的高度。"教师在分析此题时，若先入为主地介绍自认为满意的某种解法（例如"由题意，可设 $AB=DB=x$，则由 $\tan C=\frac{x}{CB}$，得 $CB=\frac{x}{\tan 30^\circ}$，从而有 $CD=CB-DB=\frac{x}{\tan 30^\circ}-x=4$，解得塔高 $AB=x=(7\sqrt{3}+7)$ 米"）后，便认为大功告成，完成了解题任务，则不利于很好地培养学生的思维品质。实际上，本题蕴含着丰富的内涵。如果放手让学生充分思考、研讨，全面寻找题中线段长度或其比值的等量关系，构设方程解得未知量，便至少还可得到如下解法：

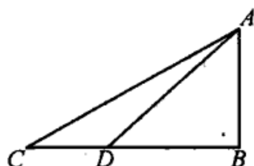


图 7.2

可采用间接求法，设 $BC=x$，则由 $\tan C=\frac{AB}{x}$，得 $AB=x\cdot\tan 30^\circ$，又由 $DB=BC-CD=x-14=AB=x\cdot\tan 30^\circ$，解得 $x=\frac{14}{1-\tan 30^\circ}$，即得塔高 $AB=\frac{14}{1-\tan 30^\circ}\cdot\tan 30^\circ=(7\sqrt{3}+7)$ 米。

波利亚在《数学的发现》中指出："学习任何东西的最好途径是自己去发现。""教师在课堂上讲什么当然是重要的，然而学生想的是什么却更是千百倍地重要。思想应当在学生的脑子里产生出来，而教师仅仅只应起一个助产婆的作用。""在给定的条件下，应让学生尽可能多地靠他们自己去发现，主动地为问题的明确表述贡献一

份力量。”从以上几例我们看到，在数学解题教学中，教师要让学生经历思维的全过程，而不应轻易地直接出示哪怕是绝妙的解答方法（实际上，这些“妙解”有的是教师经过艰苦思索而得到的，有的可能是教师直接查寻现成的习题题解而得到的结论），应引导学生能从教师的分析中懂得怎样去变更问题，转换思路；怎样构造辅助函数或图形，架设“桥梁”；怎样进行联想与类比，等等。教师应做到不刻意造作，不尽善尽美，一切自然而然，努力使解题过程的真情实境呈现在学生的面前。

（二）在问答中展示发现、获取知识的情境

我国成书于公元前三、四世纪的《学记》中说：“君子之教，喻也。道而弗牵，强而弗抑，开而弗达。道而弗牵则和，强而弗抑则易，开而弗达则思，和、易、以思，可谓善喻矣。”这里“喻”、“道”、“强”、“易”分别为“引导”、“导”、“严格要求”、“不畏惧”之意。在课堂教学中，采用“问答法”充分进行师生间交流，揭示学生可能在掌握知识和思维运行中产生的各种情况，无疑对启迪学生智慧和提高课堂教学效率起着较大的作用。但是正如《学记》中所说的：“喻”要得法，“引导”不是“注入”，“严格要求”绝非“抑制”，“启发”更不能“直接给予”。华东师大叶澜教授在《让课堂焕发出生命活力》一文中指出：“不要以为凡提问必能达到启发学生、调动思维积极性的目的。教师可把问题编得十分细碎，使学生易获标准答案，由一串细小问题循序渐进走向目标；也可以把问题设计得使学生调动起自己的经验、意向和创造力，通过或发现、或选择、或重组的多种过程形成答案。前者体现教师控制具体过程，希望学生按规定路线行进的强烈愿望；后者则表现出教师重视学生努力进行获取、形成、发现知识的过程，相信这一过程对学生的发展具有多方面的意义。”因此，如何在课堂提问中充分体现“启发”功能，让学生充分地说出“心里话”，展示出自己思维运行的真情实境，是值得我们认真探究的，以下列举几例研讨这一问题。

例 5　某老师在讲述“等腰三角形三线合一定理”时，提出以下

问题：如图 7.3，等腰 $\triangle ABC$ 中，AD 是底边 BC 上的中线，$\angle BAD = \angle CAD$。试问 AD 还具有什么性质？

学生：AD 把 $\triangle ABC$ 分成两个全等的三角形。

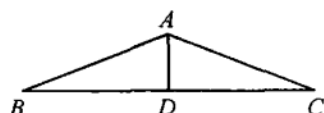


图 7.3

（本来学生这一发现实属宝贵，但却不符合教师的教学目标，于是老师进行“诱导”）

教师：AD 和 BC 什么关系？

学生：$AD < BC$。

（在条件不变的前提下，随着图形的变化，AD 和 BC 的大小关系当然会发生变化，学生这一回答显然是错误的。但教师唯恐“浪费”教学时间，没及时对学生进行纠错，而是直奔主题）

教师：AD 和 BC 垂直不垂直？

学生：（原来如此！）$AD \perp BC$。

教师：那么 AD 是 $\triangle ABC$ 的什么线？

学生：AD 是底边 BC 上的高。

（教师认为达到预期目的，叹了口气，却没有继续追究 $AD \perp BC$ 的理由）

在上述教学过程中，本可让学生调动起自己的经验、意向与创造力，用自己的力量发现图中 AD 应具有的性质，但教师却没有捕捉教学中促进学生思维发展的这一宝贵机会，而是硬拉着学生完成自己预定的教学目标。一次本应是有声有色，能充分展示学生思维的真情实境的机会被教师扼杀了，取而代之的是一出由教师控制局面，学生顺从地按照教师规定的路线行进，“风平浪静”地到达彼岸的“教案剧”。

例 6 有时学生的回答乍听似乎是毫无道理，或者似与问题的解决“风马牛不相及”，然而教师要是能及时捕捉到学生这稍闪即逝的思维“火星”，而不轻易摧毁学生思维的真实结构，阻碍学生思维的自然发展，往往能收到预想不到的教学效果。

笔者曾在一次教学公开课见到教师提问学生如何解二元二次方程组 $\begin{cases}x^2-y^2=0 & (1),\\ y=2x+1 & (2)。\end{cases}$ 一位学生回答解题过程：把(2)代入(1)，消去 y 得到关于 x 的一元二次方程 $3x^2+4x+1=0$。解得 $x_1=-1$, $x=-\frac{1}{3}$，然后把以上 x 的两值代入方程(1)，得到四组解。很明显，其中的两组解 $\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{3}m,\\ y_1=-\frac{1}{3}\end{cases}$ 不适合方程(2)，因此不是原方程组的解。对此教师大为不满，斥责这位学生为何不把 $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{3}$ 分别代入形式较为"简单"的方程(2)，而去代入方程(1)，自讨苦吃出现了增根。其实仔细分析，由于方程(1)即为 $y=\pm x$，较方程(2)简单，所以这位学生的解题思路可能代表班级为数甚众学生的真实想法。教师当时本应因势而导，与学生一起冷静分析产生增根的原因，从学生所掌握知识的可接受水平出发，抓住方程组"解"的概念的实质，分析方程(1)与(2)中 x 与 y 的对应关系：观察到若把 x 的一个值代入(2)中，只能得到唯一的 y 值；而把 x 的一个值代入(1)中，却可以得到两个不同的 y 值，其中 x、y 的一组解显然不满足方程(2)，因此为了避免产生增根现象，须把 $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{3}$ 代入(2)中去求解，如此分析想来学生是可以理解的。当然随着学生所掌握知识面的不断拓广，这种类型的二元二次方程组（由一个二元一次方程与一个二元二次方程组成的方程组）的解题思路今后还可用数形结合思想加以说明：方程 $x^2-y^2=0$ 表示直线 $x+y=0$ 和 $x-y=0$。在同一直角坐标系中画出直线：$y=\pm x$, $y=2x+1$, $x=-1$, $x=-\frac{1}{3}$，如图 7.4，便可由图中两直线的交点情况形象地说明解此类方程组时，由于代入方法不同有可能产生增根的原因（图中 A、B 两点的坐标是原方程组的解，

而 A'、B' 两点不在直线 $y=2x+1$ 上，因此是增根)。以上所举课堂提问一例，本来可由学生解答中的真实思路引发出的教学资源，却被教师忽视了，实在令人惋惜。

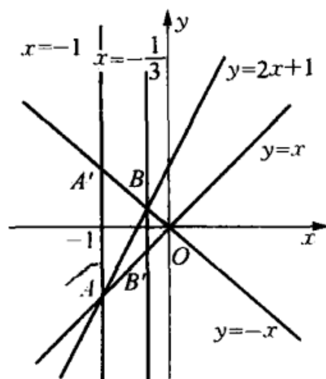


图 7.4

例 7 前苏联教育家苏霍姆林斯基说过："在学生心灵的深处，无不存在着使自己成为一个发现者、研究者、探索者的愿望。"在课堂设问中，教师要营造一种和谐的氛围，延迟判断，给学生探索的时间。许多教师(特别是年轻的新教师)提出问题后，或者怕学生失误，走弯路；或者急于为该问题的完美解决铺平道路，未等学生思维片刻，便匆忙提示该问题解决的关键之处，虽然这似乎可使教学过程较为顺坦，但却没能展示出解题中发现、获取知识的真实情境，不利于培养学生独立思考的习惯，不利于提高学生解决问题的能力。以下列举几个教学片断加以研讨：

片断 1：计算 $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}$。

教师：(未待学生思考片刻，迫不及待地提示)同学们注意，不要把四个分式一齐通分，这样计算会繁杂。

反思：不妨让学生吃一次亏，分析、比较本题的几种不同解法，从而找出其中最佳方案(先观察式子特点，再逐个将两个分式通分，可利用乘法公式简便运算)，这样经自己摸索得来的知识印象最深，掌握最牢。

片断 2：如图 7.5，四边形 $ABCD$ 中，AC 为对角线，若 $\angle ACB=\angle ADC$，且 $AC=6$，$AD=4$，$CD=3$，问 BC 等于多少时，四边形 $ABCD$ 被 AC 所分成的两个三角形相似？

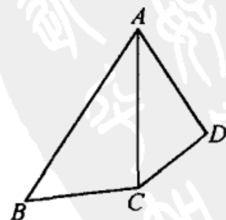


图 7.5

教师：(学生刚解答不久，教师便急忙提示)

大家要当心，本题有两种情况。

反思：由于相似的两个三角形对应关系不同，导致所求的 BC 有两个不同值。上述结论应让学生自行探究得出，教师为“爱惜”教学时间，越俎代庖抢先提示解题关键所在，这样做不利于培养学生缜密的思维习惯，不利于学生理解和掌握分类思想。

（三）形成真诚和谐的人际关系，开展有效的数学教学活动

任何教学改革归根结底是教学观念的改变，其实质是学生观的更新。在推进素质教育呼声日盛的今天，数学教育怎样促进人的发展是我们应当思考的重要问题，其关键在于师生之间能否形成一个“真实”、“接受”和“理解”的人际关系和情感态度。因此通过数学课堂教学形成学生之间、师生之间“真诚”和“和谐”的人际关系，对培养学生个性，促进学生发展具有重要意义。

由于根深蒂固的“师道尊严”思想影响，许多教师惯于用“整齐划一”来规范学生，在数学课堂教学中经常出现要求学生“统一坐姿”，要求学生齐声朗读数学定义、法则、性质等现象，而且这种现象还具有年级越低存在越普遍的特点。而教学实践表明，上述教师采用的这些“严明纪律”的做法，对学生“求真求知”具有较大的负面影响。须知数学概念具有深刻的内涵和外延，要真正理解它是需要学习者斟酌深思，对比引证，由现有发展区向最近发展区逐步过渡，而绝不是靠简单的“齐声应答”、“大呼隆朗读”所能奏效的；强调学生坐姿端正统一，唯师是听，不能随意插问和发表不同意见，无异是给学生套上精神枷锁，阻碍他们思维的正常、自然发展，从而造成一种“气氛肃穆、秩序井然”的假象，师生之间产生隔阂，教学渠道不能疏通。这些都是与实施素质教育，强调学生是学习的主体，注重发展学生的个性，培养学生能力的要求格格不入的。以下几个课堂教学实例，着实发人深省。

例 8 教师在讲解题目：“不改变分式 $\frac{3-2x^2}{-2-3x}$ 的值，使分子、分母的最高次项的系数都是正数”时，不慎误解为“$\frac{3-2x^2}{-2-3x}=$

$\frac{-(2x^2-3)}{-(3x-2)}=\frac{2x^2-3}{3x-2}$”，对于上述教师写在黑板上显而易见的“低级错误”，全班同学竟没一人举手反映，加以纠正，不和谐的师生关系可见一斑。

例 9 对于方程 $-\frac{10}{3}(x-1)^2+\frac{40}{3}=0$，本来宜采用直接开平方法解较为简便。但教师在讲解时却采用较为笨拙的“去括号—合并同类项—整理成标准方程—应用公式”解法。对教师这一不经意的“瑕疵”，全班同学或者碍于师生情面，或者缺乏互动气氛，竟没人及时指出并提出不同的解答意见。

例 10 某教师提出问题：“在小于 50 的自然数中取两个不同的数，使这两数之和恰好是 3 的倍数，不同的取法有几种？”他在分析该题解法时，将 49 个正整数按“被 3 整除、被 3 除余 1、被 3 除余 2”这三种情况分类，列出算式：$C_{16}^2+C_{16}^1\cdot C_{17}^1$，得到不同的取法有 392 种的错误答案，便认为大功告成了。这时若让学生充分参与教学活动，积极进行讨论探索，势必有人会发现“0”也是自然数，因此本题的正确答案应为 $C_{17}^2+C_{16}^1\cdot C_{17}^1=408$（结果多了 16 种）。

《义务教育数学课程标准》中指出：“有效的数学学习活动不能单纯地依赖模仿与记忆，动手实践、自主探索与合作交流是学生学习数学的重要方式。由于学生所处的文化环境、家庭背景和自身思维方式的不同，学生的数学学习活动应当是一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程。”

人本主义教育心理学家罗杰斯认为，课堂发言是学生学习的一种重要方式，通过这种方式，学生可与其他学生分享学习收获。每个学生都有自己擅长的某一方面，如有的学生擅长理论概念，有的学生擅长逻辑推理，而另外一些学生日常经验比较丰富。通过课堂发言，其他学生可分享这些知识，并且通过讨论和交流，发言的学生可以获得反馈，从而改进原有的知识体系。当前许多数学课改、教改实验，在课堂教学中无不开展“小组讨论”这种能让学生充分发言，促进学生之间、师生之间的思想交流和人际关系和谐发展的教学活动。不

容置疑，如果教师能精心组织，鼓励各组学生全力以赴地投入群体讨论，并且在讨论中加于引导，避免给发言的学生以过多的压力，这种学习小组便具有"合作性"与"亲和性"，对每一个学生都富有发展个性的意义，从而可把"死的学习"转变为"活的学习"。

例 11 教师在《分式的加减法》一课教学中，让学生进行自主探索与合作交流，取得较好的效果，其教学程序为：

A. 提出思考题：(1)分式加减法则与分数加减法则有何联系？你能结合课本第 7 页云图中的问题("回想一下分数加减法，计算 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$、$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$，从中可得到什么启示？")说说自己看法吗？(2)你能用字母表示分式的加减法则吗？(3)异分母分式加减法的关键是什么？如何找异分母分式的最简公分母？请结合课本中的例题加以说明。(4)对分式计算或化简的最后结果有何要求？课本中哪些例子说明了这个问题？

B. 学生阅读课本，结合上述问题进行独立研讨。

C. 学生分组讨论。

D. 解答上述思考题(学生口答；教师引导)。

E. 练习巩固(学生练习、板演；学生上台当"小先生"进行评讲；小组同学互相帮助；教师引导)。

F. 全班交流(让学生代表讲述该学习小组在练习中遇到的问题与发生的错误。其中有书写格式不妥的；有计算过程错误的，例如 $\frac{b}{a}-\frac{b}{4a^2}=\frac{4ab-b}{4a^2}=\frac{b-b}{a}=0$ ——若没进行合作交流，这种错误便得不到及时的揭示与纠正)。

G. 布置作业(分层要求)。

从上面课例可以看到，采用有效的合作学习(个人思考，小组讨论，同学互帮，全班交流，教师引导，适时评价)，生生、师生情感交融，组成学习共同体，便能得到事半功倍的教学效果。

笔者听了不少课改、教改实验课，深深地为学生在教师指导下，积极踊跃参与课堂合作活动所迸发出的学习热情与所发表的真知

灼见所折服。以下略举几例与读者共享。

例 12 在一节课改实验课中，教师提出一个问题：

如图 7.6，四边形 $ABCD$ 中，$AB = BC$，$AD = CD$，求证：BD 垂直平分 AC。

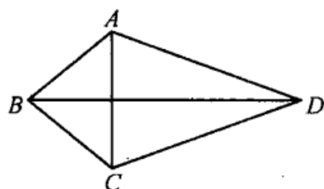


图 7.6

教师对这道“貌不起眼”的问题大做文章，他先让学生独立思考，研讨证题思路，再让学生将各自研究结果在学习小组交流，最后各小组派代表在全班展示成果，课堂上霎时呈现出一派生动活泼、你追我赶的景象，各种证法“应运而生”：

证法(1)：证两对三角形全等（设 AC 与 BD 相交于 E，先证 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$，得 $\angle ABD = CBD$；再证 $\triangle ABE \cong CBE$，由三角形全等的性质、平角的定义及角平分线的性质证得结论）；

证法(2)：证一对三角形全等（设 AC 与 BD 相交于 E，先证 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$，得 $\angle ABD = \angle CBD$；再由等腰三角形 ABC 的“三线合一”性质证得结论）；

证法(3)：不证三角形全等，而是由条件得点 B、D 都在 AC 的垂直平分线上，再由“两点确定一条直线”证得结论。

大家公认证法(3)最优，证法(2)次之，证法(1)最繁。经过生生、师生思想火花的有益碰撞，这道习题的效能得到充分的发掘。

例 13 一节初一数学“指导——自立学习”试验课，课题是“去括号与添括号”。教师让学生课前自学，先行完成课本练习题，开课后进行自学检查与辅导，然后让学生分学习小组讨论，提出自学中遇到的尚未解决的疑难问题。只见各小组学生跃跃欲试，争先恐后发言，最后几位学生代表相继提出思考性颇强的问题，例如：“为什么要学习‘去括号’?”“为什么去括号时，括号前面是‘－’号，里面各项都要变号?”等，这些问题是教者始料未及的，好在这种形式的课堂教学开展已久，师生之间教学相长，配合已日趋默契，先经学生讨论，教师随后给出的回答简明、合理，令学生能理解接受。整节课师生关系融洽，思

维活跃，高潮迭起，洋溢着民主互助、积极求索的教学气氛。

例 14 某校学生在“整式的加减”这节课的小组讨论中，提出了“两个二次多项式相加减，结果的次数是多少”的颇为棘手的问题。教师并没有急于回答，而是发动学生自行讨论解决，争论颇为激烈，终于一位女生起座，向全班同学宣布该学习小组集体讨论后得到的结论：“两个二次多项式相加减，其运算结果是次数不高于 2 的多项式或者单项式。”结论严谨，无懈可击。这种数学教学场面既“真实”又“火爆”，实在令人叹为观止。

二、体现课改新理念，努力疏通课堂教学主渠道

由上述讨论可知，好的数学教育，应当是充分发扬教学民主，学生积极参与，不断有新见解、新思维、新方法孕育产生的生机勃勃的数学教育；好的课堂教学应当包括：学习主体的“主动性”，教学过程的“民主性”，师生双方的“合作性”，内容与形式的“多样性”。我们应从培养创新精神的高度出发，从学生的发展着眼，尽力使数学课堂充满着生命的活力，洋溢着勃勃的生机。

《关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》中指出：“智育工作者要改变教育观念，改革人才培养模式，积极实行启发式和讨论式教学，激发学生独立思考和创新的意识，切实提高教学质量。要让学生感受、理解知识产生和发展的过程，培养学生的科学精神和创新思维习惯，重视培养学生收集处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力、语言文字表达能力以及团结协作和社会活动的能力。”《义务教育数学课程标准》要求“数学课程应突出体现基础性、普及性和发展性，使数学教育面向全体学生”。作为数学教育教学工作者理应身体力行，全心参与教育改革大业。素质教育的主渠道是课堂教学，为更好地培养学生的能力，提高学生的全面素质，中小学数学课堂教学要努力体现课改新理念，疏通课堂教学主渠道，摒弃上述的种种假象，去伪存真，返璞归真，更多地呈现出民主合作、求索探源、思维开拓、个性发展的真情实境。

第8章 教学设计、课堂教学及教学反思

教师专业化发展理论指出，教师的专业能力主要由教学设计能力、教学实践能力和教学反思能力组成。它们既是教师的基本功，也是制约教师专业发展的关键要素。

第1节 教学设计与课堂教学

一、关于教学设计

教学设计是我们熟悉的备课、写教案的一种现代发展。作为教学准备工作之一，教学设计对课堂教学具有定向作用。教学设计就是教师为达到教学目标而对课堂教学的过程与行为所进行的系统规划，主要解决两个问题：

1. 教什么：即教学目标的设计，包括显性目标和隐性目标。它基于对教学内容、学生认知状况的分析。

2. 怎样教：包括教学手段的选择、教学过程以及目标检测的设计、基于对教学问题的诊断分析、学生认知状况分析等。

新课程视野下的教学设计有别于传统教案，它主要是运用系统分析方法解决教学问题。以优化教学效果为目的，以传播理论、学习理论和教育理论为基础，具有很强的理论性、科学性、再现性和操作性。教学设计不仅重视教师的教，更重视学生的学，所以对学生

进行特征分析是教学设计不可缺少的步骤，体现了现代教学理论的鲜明特性。

教学设计是科学，也是艺术。教学设计是一项综合反映教师专业化水平的工作，是教师能力的集中体现。加强教学设计研究，提高教学设计水平，已经成为提高课堂教学质量和效益的根本措施之一。

二、如何撰写课堂教学设计

课堂教学设计是课堂教学准备工作的重要内容，是课堂教学活动的一种预设或构想。有句古语说得好："凡事预则立，不预则废"，做好教学设计是上好课的前提和保证。下面以"勾股定理的应用（第一课时）"（华东师大版初中数学八年级上）的教学设计为例加以阐述。

（一）指导思想和理论依据

《义务教育数学课程标准（实验稿）》指出：在教学中，应注重所学内容与现实生活的联系，注重使学生经历观察、操作、推理、想象等过程。本节课设计就是用这种思想作为指导，通过将问题情境、接受学习、感受体验学习相结合，使学生掌握知识、形成技能，并养成良好的情感态度与价值观。

（二）教学背景分析

1. 教学内容分析

在上一节学习了勾股定理的内容、验证及其简单应用的基础上，灵活运用勾股定理解决生活中的实际问题。培养学生数学建模的思想，提高他们分析问题、解决问题的能力。

2. 学情分析

一般特征：八年级学生具有好动、好问，乐于交流合作与展示自己的心理特征。

初始能力：(1)学生在前一节已学习勾股定理及其直接应用，反馈情况良好；(2)八年级学生已有一定的生活阅历，具备一定的直觉猜想、运算求解、归纳推理、类比抽象、逻辑思维及概括能力；(3)学

生对身边的实际问题很感兴趣,已初步学会用数学方法解决简单的实际问题。

信息素养:八年级学生喜欢欣赏动画及音频等媒体资料,具有一定的电脑操作能力。

3. 教学方式与手段、设备的分析

学生的学习求知欲望是从兴趣中产生的,思维主要凭借具体形象的材料进行,因此,应创设学生感兴趣的情境,采取体验探究式的教学方式,在不断的学习探究中,逐步解决问题。教学时借助媒体的直观演示,采用动手操作、小组合作的方式进行学习。

4. 课前准备

教学 PPT、打印的拓展资源、教学图片、2 张足够大的长方形纸等。

(三) 教学目标设计

1. 教学目标

知识和技能:理解勾股定理,能运用勾股定理解决简单的实际问题。

过程和方法:(1)通过观察与探索图形间的关系,培养学生的空间观念;(2)经过动手实验,将实际问题抽象成几何图形(直角三角形),初步学会数学建模。

情感态度和价值观:(1)通过设置有趣的问题激发学生学习数学的兴趣;(2)使学生在解决实际问题的过程中,体验数学学习的实用性。

2. 教学重点和难点

重点:探索、发现给定情境中隐含的直角三角形,并用它解决生活中较为简单实际的问题。

难点:利用数学建模构造直角三角形,运用勾股定理解决实际问题。

(四) 教学媒体设计

运用多媒体要做到适当、适时、适度。"适当"即必须与教学内

容和学生接受心理相适应，其中色彩、线条、图表、音响等都要恰到好处，应正确把握多种媒体（如课件、幻灯片、视频、板书等）之间的相互作用与关系；“适时”即要找准介入媒体的最佳时机，实现人机互动，发挥媒体实效；“适度”即媒体的应用必须有一定限度，应优化教学过程，揭示数学本质，而不能流于形式，忽视教学主体的作用。

本课教学媒体设计如表 8.1 所示。

表 8.1

知识点编　号	学习目标	媒体类型	媒体内容要点	教学作用	使用方式	所得结论	占用时间	媒体来源
14.2.1	理解掌握	课件	“勾股树”	A\B	B	再现勾股定理的探索过程，形成概念，引发动机	3 分	自制
14.2.2	灵活应用	课件	圆柱侧面展开图	F	F	展示蚂蚁行走最短路径；抽象“直角三角形”模型	2 分	自制
14.2.3	灵活应用	课件	插入圆柱形油桶的铁棒	H	H	观察铁棒长度变化	2 分	自制

① 媒体在教学中的作用分为：A. 提供事实，建立经验；B. 创设情境，引发动机；C. 举例验证，建立概念；D. 提供示范，正确操作；E. 呈现过程，形成表象；F. 演绎原理，启发思维；G. 设难置疑，引起思辨；H. 展示事例，开阔视野；I. 欣赏审美，陶冶情操；J. 归纳总结，复习巩固；K. 自定义。

② 媒体的使用方式包括：A. 设疑—播放—讲解；B. 设疑—播放—讨论；C. 讲解—播放—概括；D. 讲解—播放—举例；E. 播放—提问—讲解；F. 播放—讨论—总结；G. 边播放、边讲解；H. 边播放、边议论；I. 学习者自己操作媒体进行学习；J. 自定义。

（五）教学过程的设计

本环节是教学设计的核心，要把教学内容、教师活动、学生活动、所需要的教学资源及教学指导策略表达清楚，可以用文字叙述

或用表格形式表示。

教学过程是师生积极互动、共同发展的过程,是提高学生思维能力的过程。主要有组织活动设计、认知活动设计、情意活动设计和评价活动设计。

1. 组织活动设计是使课堂教学有序、顺利进行的保证。其内容包括:(1)学生课堂学习行为习惯养成设计;(2)教学环节设计;(3)教学各个阶段、各步骤之间的过渡与衔接设计。

2. 认知活动设计是课堂教学的基本活动。其内容主要包括:(1)学生学习起始状态的诊断设计;(2)让学生明确学习目标的设计;(3)教学内容设计(包括对教材内容的增删和重新组合,重、难点确定及处理,课内、外练习材料的选择等);(4)教学方法和教学媒体使用的设计(根据教学目标、教学内容、教师所长、学校实际和学生实际选择恰当的教学方法,选用恰当的教学媒体);(5)学生活动设计(包括学生活动的内容、方式、时间、过程,学法指导及调控措施等内容)。

3. 情意活动设计包括:(1)教学活动情境化设计——将教学活动置于与教学内容相应的情境之中;(2)教学活动情感化设计——发掘教材的情感因素,调动学生的情感参与和情感体验。

4. 评价活动设计包括:(1)对学生学习过程的评价设计;(2)对学生学习的情绪、行为的即时评价。

本课教学设计如表 8.2 所示。

表 8.2

教学环节	教师的活动	学生的活动	教学媒体(资源)	设计意图、依据
创设情景引入课题	点题;演示课件“勾股树”(教材 P51 阅读材料),启发引导。	学会观察,动手画画,交流讨论,发表见解。	板书课题;动画演示:“勾股树”的结构特征。	激趣;旨在进一步研究并揭示直角三角形三条边之间关系。

续　表

教学环节	教师的活动	学生的活动	教学媒体(资源)	设计意图、依据
应用扩展 探究新知	出示例题；动画演示"从立体到平面"，"最短路程是什么?"；板书解题过程；建立小组讨论、交流、合作的课堂氛围。	探究活动：1. 审题；2. 动手操作：学生可自己做一个圆柱，寻找从 A 点到 B 点的最短路线；3. 分组讨论：将圆柱沿其中一条母线剪开，展开成一个长方形，思考从 A 点到 B 点的最短路线是什么? 4. 正确画图，尝试解答。	例题：如图，有一个圆柱，它的高等于 12 厘米，底面半径等于 3 厘米。在圆柱的底面 A 点有一只蚂蚁，它想吃到上底面上与 A 点相对的 B 点处的食物，需要在侧面上爬行的最短路程是多少?（π 的值取 3）（动画演示过程） B A	抽象模型，转化化归；凸显数学本质，提高学生分析与解决实际问题能力。
巩固训练 及时反馈	教师巡视指导。有所选择地请两位同学板演，然后师生共同订正，规范解题格式，及时反馈，进行解题反思。	学生随堂练习；采用互动研讨、体验式的学习方式。学生先自行尝试思考解题思路，尔后交流反馈，写出解题过程，获得解决问题的方法。	练习 1. 甲、乙两位探险者，到沙漠进行探险。某日早晨 8:00 甲先出发，以 6 千米/时的速度向东行走，1 小时后乙出发，乙以 5 千米/时的速度向北行进。问上午 10:00 时甲、乙两人相距多远? 练习 2. 如图，有一个高 1.5 米，底面半径是 1 米的圆柱形油桶，在油桶上底面靠边的地方有一小孔，从孔中插入一铁棒，已知铁棒在油桶外的部分是 0.5 米，问这根铁棒最长有多少米?（课件演示） A	检测教学效果，反馈学生掌握新知情况，以提高教学针对性与实效性。 运用生活中与教学内容相关的情景，设计问题，拓展引申，激发学生的学习兴趣，使学生积极地参与到问题解决与探究规律的学习当中，体验学习成功的快乐。

续 表

教学环节	教师的活动	学生的活动	教学媒体(资源)	设计意图、依据
课堂小结作业布置	梳理知识,建立模型,强调应用,分层作业。	谈自己学习收获。回归教材,复习巩固。独立完成课后作业:1. 教材 P56 复习题 3、4、5;2. 课外选做题。	课件显示:归纳本节课的主要知识点及数学思想方法,形成知识体系。	分必做题与选做题,设置分层作业,满足不同层次学生的需求。

(六) 教学效果评价设计

评价应尽量力求全面、客观、公正,评价方式应尽可能做到目的性和可操作性强,灵活多样。对本节课学生学习效果以及教师自身教学效果的评价分析如表 8.3 所示。

表 8.3

形成性评价
本课基于学生已有知识和经验,密切联系学生身边生活,体现对知识的综合应用。为了促进教学目标能够全面实现,突出重点,突破难点,本课努力做到以下四点: 1. 用动画显示奇妙美丽的“勾股树”,来激发学习兴趣及求知欲望,并提出课题; 2. 问题的提出来自学生的实际生活,符合学生的意愿及思维的“最近发展区”,如蚂蚁爬行、沙漠探险、铁棒长度等问题; 3. 在活动过程中,教师能适当进行操作实践、思考探究的指导,提高合作学习的效果;善于鼓励学生敢于质疑,锻炼学生的语言表达能力,促使他们体验成功的喜悦,增强学习的信心; 4. 形成性检测情况良好,确认教学方案在预设的使用环境下可以使用。 本课应注意以下两点: 1. 这节课涉及知识内容及数学思想方法综合性比较强,问题来源于生活,解决好需要一定的生活经验积淀和将实际问题抽象成数学模型的建模能力,估计有些同学掌握得不是很好,还需在后续学习中加强与提升; 2. 课堂教学中教师不仅要关注学生的学习结果,更要关注学生的学习过程,面向全体,分类指导,使不同的人在数学上得到不同的发展。由于班级人数较多,学习程度各异,课后应加强个别辅导。

三、数学课堂教学设计的优化

《数学课程标准》强调学生是学习的主人，教师是学生学习的组织者、引导者与合作者。课堂教学要达到最佳效果，提高教学质量，关键的是教师如何优化课堂教学设计。

当前，在数学课堂教学中，还存在如下问题：(1)教师对“课标”理解不够，对“教材”设计意图不明确；(2)以“知识”为中心，重结果轻过程；(3)以“教师”为中心，重教轻学；(4)师生交流是单向的“一问一答”，缺乏多向互动交流；(5)教学设计目标指向不明，高耗低效；(6)教学过程流于形式，存在去“数学化”现象，难于体现数学教育价值，等等。

随着课改的不断深入，教师必须加强教学设计研究，真正把学习理论与教学实践联系起来，运用心理学的理论解决教学中的问题。只有优化课堂教学设计，优化教学过程，才能切实提高课堂教学质量与效益。

（一）加强学习研究，真正理解数学与教学

教师必须解读“课标”，读懂“教材”，研究学生，真正理解数学，掌握教学理论，才能游刃有余地进行有效教学。

例 1 利用数学问题的“一题多解”，遵循由特殊到一般的规律，将公式或结论进行推广等，能培养学生良好的学习习惯和思维品质。例如，求证：$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$。在学生得到一种“三角证法”之后，又给出一种复数证法，还不满足，再与学生一起研究公式的推广：$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{n-2}{n}\pi=\frac{1}{2}$（$n$ 为奇数，且$n\geqslant 3$）。

例 2 课堂中学生的错误是重要的教学资源。例如习题：直线 L 过点 $P(2,-1)$，它在 y 轴上的截距等于它在 x 轴上截距的 2 倍，求直线 L 的方程。

学生解答为：设 L 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，则 $b=2a$ ①，又由

$P(2,-1)$ 在 L 上，得 $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=1$ ②，联立①、②，得 $a=\frac{3}{2}$，$b=3$，所以直线 L 的方程为 $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{3}=1$，即 $2x+y-3=0$。此时，教师要求学生用另外一种方法来解此题：

设直线 L 的方程为 $y+1=k(x-2)$，令 $x=0$，得到 $y=-2k-1$，令 $y=0$，得 $x=\frac{2k+1}{k}$，由题意得 $-2k-1=2\cdot\frac{2k+1}{k}$，解得 $k=-2$ 或 $k=-\frac{1}{2}$，故直线 L 的方程为 $2x+y-3=0$ 或 $x+2y=0$。

此时，再让学生讨论：为何两种解法得出的结果不尽相同？通过思考，学生不但自己发现了错误，而且取得了经验，明确直线方程的截距式不包括截距为0（过原点的直线）的情况，从而对截距式直线方程有了更全面的理解。

（二）教学法设计的优化

教学法设计是联系教材、教师与学生的桥梁与纽带，是学生形成知识与能力的有效载体。一个好的教学设计一定要用先进的教学法来实施与优化。

例3 在复习"全等三角形的判定"时，将习题19.2第3题（华师大版）改编后作为例题：如图8.1，要使下列各对三角形全等，除已有条件外，还需要增加什么条件？并加以证明。

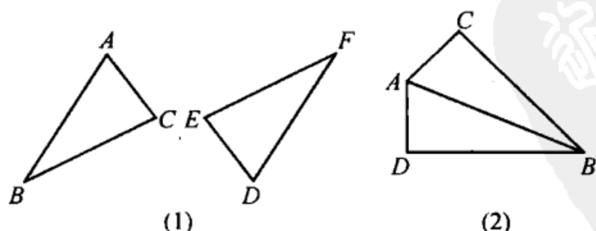


图8.1

（1）$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle F$；（2）$BC=BD$。

教学法设计：①自主探究或合作学习：讨论需要增加的“已知条件”。②成果展示（竞赛形式）：以最快的速度把需要增加的“已知条件”写在黑板上，后写者不能与前者雷同。③交流讨论，发表见解：由同学说明所添加的“已知条件”的根据，教师适时引导。④验证结论（投影）：写出证明过程。⑤比较归纳，返璞归真：全等三角形的判定方法。⑥解题反思，知识升华：查明增加条件或证明过程有错误的原因及注意事项。

设计特点：(1)有效改变习题的传统模式；(2)体现“以生为本”的课改理念；(3)教学设计环环相扣，梯度明显；(4)教学形式多样，气氛融洽；(5)凸显数学本质，水到渠成。

（三）教学过程设计的优化

教学过程是课堂教学的中心环节，课堂教学既要重视结果，更要重视过程。课堂教学要由教给学生“数学的结果”（即数学的概念、定理、公式以及计算、化简、证明的方法）转变为引导学生经历“数学的过程”，即进行数学的“过程教学”。“数学过程”是真正地理解数学，形成数学的思想方法或用数学的眼光去发现问题、审视问题和分析解决问题所必须经历的过程。那么，如何设计才能使课堂教学达到优化呢？

1. 让学生操作感悟

例4 “图形的全等”一节教学中，如果按传统方法传授现成的结论，忽视知识的发展过程，强调学生对所学知识的记忆，学生也可以掌握本节知识，但这种无视学生学习中产生的疑问，无视知识生成的教学，根本无法提高学生的学习能力。学习图形的全等应从学生生活中熟悉的物体入手，让学生在丰富的现实情境中，通过观察、操作、想象、交流等活动，认识图形全等的概念，探索两个三角形全等的条件；让学生在亲身经历中提高对图形的分析能力，发展空间观念。

2. 让学生自主探究

例5 在学习“一次函数的图象”时，绝大部分同学知道函数

$y=kx$ $(k>0)$ 的图象经过第一、三象限，但对函数 $y=kx+b$ $(k>0,\ b>0)$ 的图象经过哪几个象限感到困惑，只能靠死记硬背。为了解决这个困惑，应让学生先画出函数 $y=2x$ 的图象，再让他们将函数 $y=2x$ 的图象沿 y 轴向上平移 2 个单位，接着让同学们画出函数 $y=2x+2$ 的图象。最后，问同学们发现了什么规律?大家通过动手、观察、讨论、辨析得到一个结论：函数 $y=2x$ 的图象沿 y 轴向上平移 2 个单位后，得到函数 $y=2x+2$ 的图象，图象除经过第一、三象限外，还经过第二象限。在此基础上师生共同归纳规律：函数 $y=kx+b$ $(k>0,\ b>0)$ 的图象可以看作是由函数 $y=kx$ $(k>0)$ 的图象沿 y 轴向上平移 b 个单位后得到的，图象除经过第一、三象限外，还经过第二象限；接着再研究函数 $y=kx+b$ $(k>0,\ b<0)$，$y=kx+b$ $(k<0,\ b>0)$，$y=kx+b$ $(k<0,\ b<0)$ 的图象情况，由学生逐一进行归纳。本节课充分利用图形平移的知识，数形结合，不但使平移知识得到了进一步巩固与深化，同时解决了一次函数教学中的难点，学以致用，学生愉悦之心融于课堂，教学效果不言而喻。

3. 设计“问题串”，突出思想方法

数学教师在课堂教学中，不应急于把方法原理告诉学生，否则学生只会忙于“收拾”；而应该精心设计问题，让学生思考，使学生在思维探索中获得知识，提高能力。

例 6 用加减法解二元一次方程组 $\begin{cases}3x+5y=-7,\\5x-5y=15。\end{cases}$ 这是在学习了二元一次方程组的代入消元法之后，首次接触加减消元法。

若教师照本宣科介绍解法，学生很快便会“依葫芦画瓢”，但不知“所以然”，当然就难以有应变思维了。所以应进行“创设问题”教学，例如设计以下问题让学生思考：

(1) 解二元一次方程组的指导思想是什么?

(2) 仍用已有的代入消元法解这个方程组可以吗?

(3) 分别观察两个未知数的系数有什么特征? 能否不用代入

法直接消去一个未知数？

(4) 是否解二元一次方程组时都可以直接把两方程相加或相减来达到消元目的？

(5) 以下二元一次方程组中，采用哪种方法求解较为简便？为什么？

① $\begin{cases} x+5y=7, \\ 2x-3y=-1; \end{cases}$ ② $\begin{cases} 3x-2y=-1, \\ 4x+2y=-6; \end{cases}$

③ $\begin{cases} x+3y=7, \\ 4x+3y=19; \end{cases}$ ④ $\begin{cases} 2x-5y=7, \\ 5x+2y=-3。 \end{cases}$

学生有了问题，自然注意力集中，思维活跃。因此，在教学新内容时，如果能诱导分析，授人以渔，那么不但有利于学生深入理解知识，而且有利于培养他们的创造性思维。

(四) 作业设计的优化

作业是学生巩固对新的知识和技能的理解和掌握，并用于解决新问题的必要环节，设置时教师应摆脱题海战术，提倡“一题多解”、“以题论法”；应考虑学生的不同差异，多给学生自主选择的机会，让不同学生都能得到锻炼与提高。

例 7 在教学“一元一次方程”第一节课后，可设置如下 3 道题目(变式题，难度逐步递进)供学生选择。

(1) 下列方程的解为 $x=-5$ 的是(　　)。

(A) $-3-2x=7$ (B) $x-4=29$

(C) $3x+1=4$ (D) $4x-2=2$

(2) 已知 $x=-5$ 是关于 x 的方程 $2mx-5m+2=17$ 的解，求 m 的值。

(3) 方程 $-3-2x=7$ 与关于 x 的方程 $2mx-5m+2=17$ 的解相同，求 m 的值。

教学设计只是一种预设，“预设”并不等于“生成”，而生成又是动态的，所以教师应因人因时因地做“再教设计”，即教学反思，这部分内容将在下节具体阐述。

第2节　教学反思

一、教学反思及其意义

教学反思是指教师在教学实践中，批判地考察自我的主体行为表现及其行为依据，通过观察、回顾、诊断、自我监控等方式，或给予肯定、支持与强化，或给予否定、思索与修正，将“学会教学”与“学会学习”结合起来，从而努力提升教学实践的合理性，提高教学效能的过程。教学反思被认为是“教师专业发展和自我成长的核心因素”，是批判地考察自己的教学过程及能力的一种手段。

教学反思是有益的思维活动和再学习方式，每一位优秀教师的成长都离不开教学反思。我国著名心理学家林崇德提出“优秀教师＝教学过程＋反思”的成长模式。叶澜教授说，一个教师写一辈子教案难以成为名师，但如果写三年反思则有可能成为名师。教学反思可以激活教师的教学智慧，是教师成长的“催化剂”，是教师发展的重要基础。是否具有反思的意识和能力，是区别作为技术人员的经验型教师与作为研究人员的学者型教师的主要指标之一。

二、如何写好教学反思

教学反思就是研究自己如何教，如何学；别人如何教，如何学；如何在教中学、学中教的问题。那么，教师如何写好教学反思呢？

1. 从文体结构上，建议把“教学反思”看成“一事一议”的实用性议论文。其写作结构可以概括为“教学实例——得失（成败）分析——理性思考”，第一、二部分是“反”，第三部分是“思”。第三部分是重点，应详写，尽量写出深刻的切实可行的方案、策略。

一般来说，首先叙述具体的教学活动（应简略些），接着分析在这一活动中自己的成败得失之处，最后针对成败得失，结合新课程、

新理念谈自己的思考和感悟。

2. 从写作内容上看，大致可以从以下四个方面选择话题来写“教学反思”：

（1）写成功得意之处。如教学中引起师生共振效应的做法；课堂上一些精彩的师生对答、学生争论；课堂教学中临时应变得当的措施；层次清楚、条理分明的板书；某些教学思想方法的渗透与应用的过程；教育学、心理学中一些基本原理有意使用的感触；教学方法上的改革与创新；感受最深的教材改进和创造性的处理等。把它们详细得当地记录下来，供以后教学时参考使用，并可在此基础上不断地改进、完善、推陈出新。

（2）写失误或不足之处。审视自己课堂教学的失误之处，以及解决问题的办法、对策。如问题情境的创设有没有给学生思考的空间；学习活动的组织是否有利于学生的自主学习；小组合作学习有没有流于形式；是否关注学生情感、态度、价值观的发展；学生学习的兴趣是否浓厚等。对它们进行系统的回顾、梳理，并作深刻的反思、探究和剖析，使之成为今后再教学时的借鉴。

（3）写学生的问题和建议。学生在学习中肯定会遇到很多困难，也必然会提出各种各样的问题，有些是个别的，有些是普遍的，也有些是教师意想不到的，还有一些是富有创新性的。可能有的问题教师一时也难以解答，这些问题应及时记录下来，并及时反思，以便在以后的教学中对症下药，实施补救措施。这样做，一方面对学生也是一种赞赏和激励，有利于充分发挥学生的教学主体作用和发扬教学民主；另一方面可以拓宽教师的教学思路，提高教学水平。

（4）写反思后的“再教设计”。一节课下来，静心沉思：本节课摸索出了哪些教学规律；教法上有哪些创新；知识点上有什么发现；组织教学方面有何新招；解题的诸多误区有无突破；启迪是否得当、训练是否到位。及时记下这些得失，并进行必要的归类与取舍，考虑一下再教这部分内容时应该如何做，写出“再教设计”，这样可以做到扬长避短、精益求精，把自己的教学水平提高到一个新的境界

和高度。

"金无足赤，人无完人"。我们只有在教学工作中多作反思，总结、发扬教学的成功经验，改正、弥补教学中的缺点与不足，不断进步，不断完善，才能使自己成为一名优秀的教师。

三、撰写教学反思的几点建议

写教学反思，贵在及时，贵在坚持。一有所得，及时写下，有话则长，无话则短，以写促思，以思促教。长期积累，必有"集腋成裘，聚沙成塔"的收获。撰写教学反思时，强调以下几方面：

1. 要以具体的教学活动为基础

教学反思直接来自于实际的课堂观察或课堂经历，可以是通过录像、录音等手段所保存下来的教学记录，或以文字形式加以记录。

2. 要选好反思的"切入点"

教学活动具有时间性和整体性。时间性是指教学活动是在一定的过程中发生的，总是先发生什么再发生什么，有其先后顺序。整体性是指教学活动中的诸要素，如学生、教学目的、教学内容、教学方法、教学环境、教学信息的传递以及教师等，他们之间不是简单的组合，而是相互影响、相互制约的复杂整体。

面对这样一个复杂整体，作为一种理性思维的反思，要着眼于细微处，选取合适的"切入点"。"切入点"可以是教学中的某一个环节，如导入、问题讨论等；可以是教学活动中的某个方面，如教学情境的创设、教师的提问或评价、学生的回答及表演等；可以是预设与生成、目标与效果、教师与学生等关系的思考；可以是课堂中的"闪亮之处"；也可以是给人留下遗憾的"败笔"等。

3. 要依托一定的教学理论

教学反思需要理论的引领，这些理论可以是以概括化的方式表达出来的新课程教学理念，比如师生对话、回归生活、自主合作探究、体验等；可以是新课程改革实践中提出的"生命课堂"理论（叶澜）、"生本教育理论"（郭思乐）、"理解教育论"（熊川武）、"生命教

育”理论(冯建军)等等。

通过这些理论的引领,可以使教学反思冲破原有的“认识框架”,超越简单的“是”与“非”、“好”与“不好”这样纯粹经验性的判断和理解,进一步探讨“隐藏”在教师教学行为背后的教学理念、教学智慧等,从而有效地对实践进行恰如其分的批判和评价,乃至进一步提炼出属于自己的“扎根”理论。

4. 要进行必要的分析阐释

教学反思中的理性认识不同于一般理论文章中的理论阐述,它是在吃透理论基础上的理论运用。有时候表现出来的虽然只是“片言只语”,但它绝不是反思的“点缀”或“标签”,它必须与教学活动的分析阐释结合在一起,揭示出教学活动中隐含的教育理念和实践智慧,总结其中的经验和教训,发挥理论在教学反思中的指导价值。

5. 要开展对话交流活动

教学反思是对教学活动的一种主观性思考。不同教师由于专业兴趣和视野的限制,反思时很可能出现“视域”的分歧。不同教师有不同的“关注点”,立论的依据不同,认识的深浅不同,对同一教学现象,有时候会发出多种声音。正是这些不同的声音,为我们从不同侧面反思教学、认识教学活动提供了多维的视角。可见,教学反思不能“执一己之端”,还需要开展对话交流活动,让不同的教师参与反思,通过不同的声音,唤起对教学活动不同层次、不同视角的思考,在不同见解的碰撞争鸣中,对教学活动进行“拷问”,从而贴近教学的真实,促进参与者不断调整自己的认识,既不简单认同,又不固执己见,你来我往,如琢如磨,推动反思的深入。

教学反思既是教学实践中一个过程的结束,同时又是新的教学实践的开始。只要我们对教学活动坚持不懈地进行反思,一定能不断提高对教学的认识,发展教学实践智慧,在“反思——实践——反思”的螺旋式上升中,实现自己的专业成长。

四、记一节数学观摩课的教学案例与反思

例 8 课题是《生活中的轴对称》(华东师大版初中数学七年级下册)。授课者为某县中学数学骨干教师。

(一)《生活中的轴对称》教学案例

表 8.4

教学活动		课　堂　实　录
环节一:成果验收,展示才华	让学生分组展示课前收集到的各种图标、建筑、文字、山水倒映的图片……,并选派代表用简短的语言来说明这些图片的共同特征,以及收集过程中自己的体会。	小组 1:我们组发现汉字中有很多字是轴对称的,如"田、甲、中、目……";还有英文字母中也有轴对称图形,如"A、B、C、D、E、M……",发现它们都至少沿一条直线对折后两边是重合的。 小组 2:我们知道国旗是一个国家的象征,我们在寻找国旗图案时,不仅认识了一些国家的国旗,同时还发现有些国家的国旗是轴对称图形。 小组 3:我们小组发现日常生活中一些简单的几何图形也有轴对称,如手上的 CD 盘,你们知道它的对称轴在哪里,有几条对称轴吗?当然除了这个,还有"正五角星"、"正三角形"等等。 小组 4:平时我们在公路边都可以看到一些交通图标,你知道它们分别表示什么意思吗?另外我们还发现它们中有许多是轴对称的。 小组 5:我们在一些婚宴上会看到大红"囍",发现它们沿中间的折线对折,左右两部分重合;同样我们发现中国的民间剪纸中很多也是轴对称的。 小组 6:我们经常读到这样的文句:山水辉映,山连着水,水映着山……其实大自然也给我们许多轴对称的画面,艺术家发现了它们,用照相机为我们带来了"大自然创造的山水的轴对称"。 小组 7:大自然不仅仅为我们创造了自然风光的轴对称,其实自然界还有一些有生命的"轴对称"。你看这只美丽的蝴蝶,它的躯干就像一条直线,翅膀关于这条直线对称,还有你们看这些图片中的昆虫不都是这样的吗?你们知道为什么会这样吗?因为,只有两边翅膀对称了,它们才能在天空自由飞翔。 小组 8:这是我们小组收集的一些生活中的商标,发现有些设计也利用了轴对称知识。 小组 9:建筑师们看到了轴对称的和谐之美,在建筑设计中用到轴对称的平衡美,如北京的故宫、泉州古厝的屋顶……

续 表

教学活动		课 堂 实 录
环节二：导入	多媒体播放音乐，并展示一系列图片，让学生发现图片的共同特征。	教师：刚才大家交流的上节课布置的小组作业真是太精彩了，不仅让我们了解了有关数学学科的课外知识，也让我们认识到无论自然界中，还是生活中，人们有意或无意地接触着很多“轴对称”图形，所以只要我们细心观察，认真研究，我们不难发现其实“数学就在我们身边”。 我也收集了一些图片，下面我们一起来欣赏一下，看看它们有什么共同特征？ 学生：（看完后，回答）它们都关于某条直线对称。
环节三：归纳、理解概念	再次阅读课文，对比、归纳概念。	教师：有没有发现，我们刚才多次提到“轴对称”、“轴对称图形”、“对称轴”这几个词，它们一样吗？我们先再次阅读课本§10.1节全文，再进行小组讨论，想想“轴对称”、“轴对称图形”、“对称轴”这三个概念是否一样，有什么联系？ 学生：（阅读全文，并讨论） 学生1：“轴对称”是针对两个图形来说的，而“轴对称图形”只有一个图形。 教师：大家认为呢？ 学生：（全体肯定） 教师：那我们能不能用严谨的语言来归纳小结呢？ 学生2：如果两个图形沿着一条直线翻折，能够完全重合，那么就说这两个图形关于这条直线轴对称；如果一个图形沿着一个直线翻折，对折的两部分完全重合，那么这样的图形是轴对称图形，这条直线叫做这个图形的对称轴。（同时教师板书） 教师：更确切地说，“轴对称”指的是两个图形之间的位置关系；“轴对称图形”指的是一个图形的性质；“对称轴”指的是一条产生对称关系的直线。
环节四：动手试验，加深概念理解	试验一：把一张纸对折，然后从折叠处剪出一个图形，看看展开后是一个什么样的图形？试验二：在白纸上滴	教师：我们通过观察、分析、归纳找出了三个概念之间的联系与区别。下面请大家根据试验过程的提示，动手完成，然后请同学把自己的作品展示一下，并用今天大家所学的知识说说自己作品有什么特征，当然如果可以的话，你也可以为自己的作品取个名字（课件展示题目）。 学生：（动手操作） 学生3：我的作品名字是……，它是轴对称图形，因为它沿着折痕左右对称，折痕是它的对称轴。 教师：剪得真漂亮，名字也取得不错（学生抢了我的话）。 学生4：有个地方说错了，不能说折痕，应该说成折痕所在的直线。 教师：（看到有些学生在犹豫，笑了笑）谁说得有道理呢？

续表

<table>
<tr><th colspan="2">教学活动</th><th>课堂实录</th></tr>
<tr>
<td>环节四：动手试验，加深概念理解</td>
<td>几滴墨汁，将纸迅速对折、压平，并用手指压出清晰的折痕，再将纸打开后铺平，看看展开后图案是什么图形，它们彼此之间有什么关系？</td>
<td>让我们再来看看“对称轴”的概念，再看看手中剪纸上的折痕，发现什么了吗？
学生5：我知道了，对称轴是一条直线，而折痕是一条线段，所以同学4说得对。
教师：太棒了！这让我们认识到学习一定要认真推敲，说话和做事也要严谨。回想一下，刚才小组展示时，第5小组一同学说：“所剪窗花（轴对称图形）的折痕是对称轴”，学了现在这些知识你们觉得这句话对吗？
学生：（大部分回答）不对，应该说折痕所在的直线是对称轴。
教师：好，现在我们再来完成第二个试验，你又有怎样的发现呢？
学生：（动手操作）
学生6：我做出来的是两个一模一样的图形，它们关于折痕所在的直线对称。
教师：那也就是说这两个图形是成什么关系？
学生6：轴对称关系。
学生7：我做出来的是一个整体图形，但它的左右两个部分关于这条折痕所在的直线对称，所以它是轴对称图形。
教师：通过阅读我们知道了“轴对称”、“轴对称图形”、“对称轴”三者的概念；通过试验我们又认识到这三个概念之间的区别和联系。现在我们来完成这张表格，先小组讨论一下，再请代表来完成。
<table><tr><th>概念</th><th>轴对称图形</th><th>轴对称</th><th>对称轴</th></tr><tr><td>定义</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>区别</td><td colspan="2"></td></tr><tr><td>联系</td><td colspan="2"></td></tr></table>学生8：我觉得它们最大的区别是“轴对称图形”只是一个图形，“轴对称”是两个图形。
学生9：我觉得它们的联系应该是：不管“轴对称”还是“轴对称图形”，都是沿着一条对称轴对折，两边的图形能够完全重合。
教师：很好！也就是说：“轴对称”是指两个图形沿着对称轴对折后完全重合时形成的关系；而“轴对称图形”是指一个图形沿着对称轴对折后两部分能完全重合。</td>
</tr>
</table>

续 表

教学活动		课堂实录
环节五：作业布置、课堂小结	手工制作图画或贺卡，给自己的父母、老师、朋友赠送节日礼物。	教师：(播放课件)同学们，看到大家收集到的轴对称图片后，你们让我也学到了一些相关的课外知识，我很感谢你们！现在我要告诉大家，五月除了有“五一”国际劳动节、“五四”青年节外，还有一个大家要记住的节日，那就是五月的第一个星期日是“母亲节”，所以你们能否结合今天的知识，发挥你们的想象，亲手制作一张图画或贺卡送给自己的父母、老师、朋友……祝他们节日快乐！ 学生：(齐声回答)能！ 教师：今天你们快乐吗？有哪些收获呢？ 学生：(齐声回答)快乐！ 学生10：今天学习了“轴对称”、“轴对称图形”、“对称轴”等有关知识。

(二)《生活中的轴对称》教学反思(执教者)

整个教学过程基本上是按照我预先设计的教学环节一步一步展开的，但在这个特殊的教学现场却发生着几个教学细节让我难忘，不能不让我好好反思。

1. 一次“大胆”地“放手”

教学的第一个环节：让已分好的9个小组各自选派几名学生作为代表，展示自己小组的收集成果，学生们既展示自己收集到的各种图标、建筑、文字、山水倒映的风景画等生活中常见到的一些轴对称图形，又用语言表述寻找、收集过程的感受。通过“阅读课本，理解知识，结合实际，表达感受”，将“轴对称”这一知识内化，把“抽象”化成“形象”，再回归“抽象”。

上述环节预计的时间是将近20分钟。在此之前，我有时会让个别学生走上讲台当“一天小老师”，说说自己的解题思路；有时会让学生站在教室的中央与其他同学分享自己的学习感受。那时发表自己见解的学生，面对的是相处了大半年的熟悉的老师和同学。但这次，我是第一次“大胆”地将学生“大面积”(至少三分之二以上)推上讲台，他们面对着不仅仅是过去朝夕相处的老师和同学，还有

几十张陌生的面孔——从其他学校来听课的领导与教师。当我还在想如何为他们“救场”时，学生们的表现却让我刮目相看。他们每组两人上台，一人在展示台上一幅幅地展示着本小组所收集的图片，一人解说所展示的图片内容，最后还说说自己小组对“轴对称”的认识，井然有序，配合默契。他们镇定、大方，用自己粗糙的、没有经过过多修饰的语言，说出了自己的感受，让我感到担心是多余的。当每一组展示后，我真心地为我的学生鼓掌祝贺，对他们的成绩表示肯定。

美国心理学家罗杰斯认为“成功的教学依赖于一种真诚的理解和信任的师生关系，依赖于一种和谐安全的课堂气氛”。教师在教学中应把信任的目光投向每位学生，把尊重的话语送给每位学生，把温馨的微笑洒向每位学生。教师应改变以前的“大包大揽”，把舞台留给学生，让学生的主体作用发挥得更加充分，将自身的主导作用发挥得更有效。

2. 一个没有“及时”纠正的“错误”

收集“剪纸”中轴对称图形的小组，在展示图片，并发表感受时，第5小组一学生说：“我发现剪纸作品有很多是轴对称图形，如我手上的这个窗花，它是经过对折后，再用剪刀剪出来的，我们小组还发现了这条折痕就是它的对称轴……”

在场的所有教师都听出了该学生的话中出现了一个错误——“折痕就是它的对称轴”，这时我很想当学生表述完本组的观点后，对学生的表现给予肯定，并及时地向学生提问：“你认为手上剪纸的折痕是一条什么线？对称轴又是一条怎么的线？两个概念是一样的吗？”进而引导学生认识到她的观点“把一条线段当作对称轴”是错误的。但后来我改变了这一想法，有意识地想把学生的这一错误“保留”着，放在归纳总结“什么是轴对称图形、对称轴”等基本概念时，才引导学生回想前面自己“探索”过程中的这个错误，并将前面所概括的观点加以修改，结果让学生4抢先指了出来，出乎意料，但更多的是欣慰。

新课程的最高宗旨和核心理念是“为了每一位学生的发展”。教师必须把学生视为“发展中的人”，必须尊重学生在各自学习中的理解与意见，让学生品尝探索的喜悦，即使学生的意见不全面甚至有错误，也要给他们理解和改正的时间和机会。这样才能彻底改变教师主宰课堂的现象，使传统课堂的“以教师（或知识）为中心”，让位于师生互教互学，彼此形成一个真正的“学习共同体”。

3. 一个“学困生”的积极回答

生 1：看，我这个图案也是一个轴对称图形吧，你知道它像什么呢？

生 2：是的，中间那条折痕所在的直线就是它的对称轴，而且左右一模一样，它当然是轴对称图形。至于像什么…有点像两只狮子，你还不如再在中间加个圆形的图案，看起来就像两只狮子在抢球了，哈哈，还可以给个好听的名字叫“狮王争霸”呢！……

听着两个学生的对话，我循声望去，心想生 1（这是一个知识程度较差的学生）又在聊天了。由于后面有那么多的教师在听课，我就慢慢地走到两个学生的旁边，本想提醒他们注意课堂纪律，但看到他们桌子上那张引发这次“破坏”课堂纪律的、墨水还未干的图案，发现是自己想错了，学生真的是在讨论问题，而且那张图案还真有那么点“狮王争霸”的意思。这时，我问学生 1：敢不敢上去展示一下你的作品？学生 1 看到我对他微笑着，很腼腆地点点头，拿着那张半干的作品走上讲台，面向教师和同学说明自己创作的图案。课后生 1 认真、较好地完成了这部分的练习与作业。

传统的教学让学生在学习数学时感到枯燥、乏味，从而产生畏难情绪和厌学情绪。但数学不是无源之水，它来源于日常生活，很多问题都是日常生活中的数量关系和实物的抽象和概括，如果教师能善于把抽象的概念具体化，深奥的道理形象化，枯燥的事物趣味化，创设一个和谐轻松的课堂教学氛围，让学生在“乐中学，学中乐”，那么即使基础较差的学生也能在数学课堂上学到自己能力限度以内的数学知识。因此，教学中应给全体学生创设相应程度的成

功机会，使他们感受到成功的喜悦，使每一层次的学生都有不同的收获，让不同的人在数学上得到不同的发展。

一节观摩课只有 45 分钟，但教学现场留给我的思考与启发却很多。

（三）教学评议

课后，以这节课为载体，围绕“新课标数学课怎么上?”为主题展开热烈研讨。大家认为：本节课很好地体现了“以学生发展为本”的教育理念，具体表现在：(1)“教学生活化”。本课以“数学来源于生活，回归生活”为设计主线，将抽象的概念具体化，营造一个和谐轻松的课堂氛围，让学生在“乐中学”；(2)“教学活动化”。将学生学习的时间、空间延伸到课堂之外，通过学生自主学习、收集资料、交流感受，将课堂设置成提供学生表演和展示才华的平台，以小组成果展示来检测学生的课前学习情况，不仅丰富了学生的课外知识，还培养了学生自主探索、合作交流的能力；(3)“教学情感化”。关注学生的认知过程，促进学生的思维、品德和心理等方面的发展；(4)“教学个性化”。教学既面向全体，又考虑不同学生的个性差异和发展层次，充分体现因材施教的原则。



第9章 数学教师的基本教学技能修养

第1节 数学专业修养

一、能进行严谨的逻辑表示与推演

例1 高中课标数学必修1(人教A版)的有关逻辑表示与推演。

1. 集合间的基本关系、集合的基本运算的逻辑表示

(1) 集合A是集合B的子集。

$$A \subseteq B: \forall x \in A \Rightarrow x \in B。$$

其中,$\forall$为全称量词,相当于"对任意一个,对每一个";$\forall x \in A$,为全称限制量词;$\Rightarrow$,即推出。

(2) 集合A与集合B相等。

$$A = B: A \subseteq B \land B \subseteq A。$$

其中,$\land$为逻辑连结词,相当于"且"。

(3) 集合A是集合B的真子集。

$$A \subsetneqq B: A \subseteq B \land (\exists x_0 \in B \land x_0 \notin A)。$$

其中,$\exists$为存在量词,相当于"存在"。$\exists x_0 \in B$,为存在限制

量词。

（4）集合 A 与 B 的并集。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}。$$

其中，$\vee$ 为逻辑连结词，相当于“或”。

（5）集合 A 与 B 的交集。

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}。$$

（6）集合 A 的补集。

$$\complement_U A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}。$$

2. 函数及其最值的逻辑表示

（1）函数的概念。

$y = f(x)$：$\exists A, B \neq \varnothing$，$\exists f$，$\forall x \in A$，$\exists_1 y \in B \Rightarrow f: x \to y$。

其中，A、B 为数集。f 为对应关系（或对应法则）。x 叫做自变量。A 称作函数的定义域（domain），可记作 D_f。$\forall x \in A$，为全称限制量词。与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值（或因变量）。y 取之于 B。B 称作陪域（co-domain）。$\exists_1 y \in B$，是用的存在量词，表示存在唯一的。函数值 y 的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in A\}$ 叫做函数的值域（range），可记作 R_f。值域是陪域的子集。$f: x \to y$，与 x 的值相对应的 y 值必须满足（或符合）已给定的对应关系 f。

（2）函数的最值。

M 是函数 $f(x)$ 的最大值：

$$\exists M \in R,\ \forall x \in D_f,\ f(x) \leqslant M \wedge (\exists x_0 \in D_f,\ f(x_0) = M)。$$

N 是函数 $f(x)$ 的最小值：

$$\exists N \in R,\ \forall x \in D_f,\ f(x) \geqslant N \wedge (\exists x_0 \in D_f,\ f(x_0) = N)。$$

3. 一个常见典型错误的逻辑推演及其修正

课本中的习题：“已知函数 $f(x)$ 是偶函数，而且在 $(0, +\infty)$ 上

是减函数，判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数，并证明你的判断。”

一个典型的错误逻辑推演为：

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，所以

当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) > f(x_2)$。(*)

由于 $0 < x_1 < x_2$，因此 $0 > -x_1 > -x_2$，即 $-x_1, -x_2 \in (-\infty, 0)$。

因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x_1) = f(x_1)$，$f(-x_2) = f(x_2)$。

由(*)，得 $f(-x_1) > f(-x_2)$。因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数。

一个正确的逻辑推演可以是：$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$，$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow f(-x_1) < f(-x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x)\nearrow_{(-\infty, 0)}$。

4. 函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象对称性的逻辑推演

(1) 课本的逻辑推演：“因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$，点 (x, y) 与点 $(-x, y)$ 关于 y 轴对称，所以 $y=2^x$ 图象上任意一点 $P(x, y)$ 关于 y 轴的对称点 $P_1(-x, y)$ 都在 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象上，反之亦然。”

(2) 为增进理解，试进行另外一种逻辑推演：取函数 $y=2^x$ 图象上任意一点 $P(x, y)$，则点 $P(x, y)$ 的坐标 (x, y) 满足函数关系式 $y=2^x$。因为 $y=2^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$，所以点 $P_1(-x, y)$ 的坐标 $(-x, y)$ 满足函数关系式 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，即点 $P_1(-x, y)$ 在函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象上。又因为点 $P_1(-x, y)$ 与点 $P(x, y)$ 关于 y 轴对称，所以函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称。

二、善于欣赏数学与把玩数学

例 2 对数字的欣赏与把玩。

华东师大版课标教材数学七年级上册有这样一道练习题：下列各数中，哪些是正数？哪些是负数？

$+6$，-21，54，0，$\frac{22}{7}$，-3.14，0.001，-999。

这本来是一道课堂练习，经观察，口述即可完成。但仔细看这些数字，个个都是跃动的精灵，每每都有精彩的故事。数字是有灵性的，数字承载着哲理，数字是可以把玩的。

1. “6”，是个吉祥的数字，寓意“六六顺”。6 是由 1 开始的最初 3 个自然数的和：$1+2+3=6$；6 又是最初两个素数的积：$2\times 3=6$。螺母和螺帽是正六边形，蜂房的表面也是由正六边形构成的。正方体骰子的点数最多是 6 点。6 倒过来翻了个个儿，就增加了半倍，成了 9。台球子的 6 子和 9 子都得在头上作标识，如 $\hat{6}$ 和 $\hat{9}$，才不会引起混淆。9 和 6 还经常吵架，9 骂 6 整天挺着个肚子不像话，6 骂 9 整天倒立走路没个正经。

2. “21”，常言道，不管三七二十一，也就是不管好坏，所以“三”常常指代和意味着“好”，“七”常常指代和意味着“坏”。不过现在“七”已不再当作“坏”。时下私家车的车牌号还常常带 7，因为“七”与“妻”谐音，如 527(我爱妻)，917(久要妻)，799(妻久久)等，以表男主人对女主人的心迹。21 是由 1 开始的前 6 个自然数的和：$1+2+3+4+5+6=21$，还是菲波那契数列的第 8 个成员：1，1，2，3，5，8，13，21，…

3. “54”，“五四”青年节，“五四运动”。一副扑克牌有 54 张。54°的余角是 36°，36°是黄金三角形的内角。36°是 18°的 2 倍，54°是 18°的 3 倍，18°的正弦值是黄金分割率的一半。

4. “0”，如水中月，镜中花，不管来多少个还是 0：$0+0+\cdots+0=0$。

0，如谷粒，小鸡面前的盘中物，来一个，消灭一个，来两个，消灭一双：对任何数 a，$a+0=a$。（此处 a 即如小鸡，谷粒 0 被小鸡吃掉，吞进肚里，消失了）

0，似如来佛的大肚，能容天下所有难容之物：对任何数 a，$a\times 0=0$。（任何事物 a，都可以被如来佛的大肚 0 所容纳，化解了，消失了）

0，午夜零点，是起点，还是终点？0，像谷子，是果实，还是种子？这个问题犹如那个古老的问题：是先有鸡，还是先有鸡蛋？

5. “$\frac{22}{7}$”，约率，化为小数，计算器显示为 3.142857143，前三个数字 3.14 与 π 的值的前三个数字完全一样。

6. “3.14”，常用来近似指代圆周率。

7. “0.001”，精确度的要求：精确到 0.001，即千分位。0 和 1，二进制数。0 和 1，曲与直。1，是 0 的突破。0 和 1，可作为开关语言，也是电子计算机的整个运行工作语言。

8. “999”，999 感冒灵，三九胃泰。黄金饰品的成色，如 999‰ 金。三个 9 一齐做一个前滚翻就能减掉三分之一的体重，成了 666。

例 3 对“十”号的欣赏与把玩。

1. “十”，正号，性质符号：正数，正电（阳电），正电荷，正极（阳极）；正化合价，正离子（阳离子）；阳性（疾病诊断表示符号）。

2. “十”，加号，运算符号：$1+1=2$；联结符号：$2H_2O$（液）══ $2H_2$（气）$+$ O_2（气），蓝色硅胶＋水══粉红色硅胶。

3. “十”，方位，经纬；瞄准器；十字街；十字光标（精确选择光标）；指北针；平面直角坐标系；移动光标。

4. “十”，醋，古代炼金术士的化学符号；有浑浊或沉淀、变色等现象（医用注射液物理化学配伍禁忌符号表示）；汉字的“十”或“拾”；围棋的眼（气孔）。

5. “十”，十字架，基督教的标志；铁十字勋章；十字远征军佩戴的十字符号；医疗卫生标志；红十字，国际红十字会；瑞士、希腊等国

国旗上的标志为白十字；瑞典国旗黄十字，芬兰国旗蓝十字，汤加等国旗红十字。

6. 动感的“十”：卍（逆时针，或右旋），“万德吉祥”的标志，佛教的法轮；卐（顺时针，或左旋），纳粹德国的党徽。

7. 倾斜的“十”：×，乘号，即连加；×，X光，未知，某某；×，剪切，删除，取消；×，错误，否定，否决；×，消灭，处决；×，封闭，栅栏；倾斜再加点滴的“十”：※，有毒性作用（注射液物理化学配伍禁忌）。

8. “十”，古汉字，表数字七。“×”，古汉字，表数字五。

9. “十”与“×”拼合一起：汉代司南图象；四通八达，辐射扩张；英国、澳大利亚等五国国旗上的标志；意大利罗马圣彼得广场造型；联合国旗帜、会徽上的标志（地球经线表示）。

例4 对三角尺的欣赏与把玩。

一副三角尺（三角板）：含30°角的直角三角形和含45°角的直角三角形，是两个基本的三角形，是全球通用的数学学习工具！可见其工具性、基本性和丰富性，即必具有“工具”的效用、“基本”的特质和“丰富”的内涵。

1. 正方形沿着一条对角线剪开，可得两个等腰直角三角形，即含45°角的直角三角形，其中一边含有无理数$\sqrt{2}$；正三角形沿着一条对称轴剪开，可得含30°（或60°）角的直角三角形，其中一边含有无理数$\sqrt{3}$。

2. 含45°角的直角三角形的三边长度之比是$1:1:\sqrt{2}$。含30°角的直角三角形的三边长度之比是$1:\sqrt{3}:2$。这两种基本三角形的边长分别是$\sqrt{1}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{4}$。

3. 用一副三角尺可作出如下11个确定度数的角（平角不计）：15°，30°，45°，60°，75°，90°，105°，120°，135°，150°，165°。它们恰构成等差数列，公差15°，正好12等分平角。

4. 用两个相同的含45°角的三角尺可拼出正方形、平行四边形、等腰直角三角形；用两个相同的含30°角的三角尺可拼出矩形、

平行四边形、正三角形、筝形和顶角为120°的等腰三角形。

5. 含45°角的三角尺绕直角边翻转(在平面上),构成大的三角尺(相似比为$1:\sqrt{2}$);依次绕直角边、所得大三角尺的直角边连续两次翻转,构成更大的三角尺(相似比为$1:2$);绕斜边翻转,构成正方形,依次绕不同的直角边三次翻转,构成大的正方形(两正方形相似比为$1:\sqrt{2}$);依次绕斜边、直角边连续翻转,构成直角梯形(两底长之比为$1:2$,两腰长之比为$1:\sqrt{2}$)。

6. 含30°角的三角尺绕长直角边翻转,构成等边三角形;依次绕不同的直角边连续三次翻转,构成菱形;绕斜边、短直角边连续翻转,构成大的三角尺(相似比为$1:\sqrt{3}$);绕斜边、长直角边连续翻转,构成直角梯形(两底长之比为$1:2$,两腰长之比为$\sqrt{3}:2$);绕斜边翻转,构成筝形。

7. 每副三角尺斜边上的高相等。含45°角的三角尺的斜边与含30°角的三角尺的长直角边等长。含45°角的三角尺斜边上的高是斜边的一半。含30°角的三角尺斜边上的高是长直角边的一半。

8. 一副三角尺,让等长的两边重合,并使两个三角尺所在平面互相垂直,构成四面体,则四个面均为直角三角形。

9. 若含45°角的三角尺的一直角边与含30°角的三角尺的短直角边重合(注意:并非一副),长设为单位1,并使另外两条直角边异面垂直,构成四面体,则第6条边长为$\sqrt{5}$。

10. 含45°角的直角三角形,是七巧板的基本图形,其中两块大的,两块小的,一块中等大小的,另外一块小正方形和一块平行四边形,均可由两个小的含45°角的直角三角形拼出,七块板恰拼成一个大正方形。

11. 由两副三角尺拼合成的正三角形和正方形,是能铺满一个平面的两种基本的正多边形;一副三角尺,等长的两边接合,恰拼成一个四边形,这种四边形也能铺满整个平面。

12. 柏拉图的"几何或数学原子论"的观点认为,两种基本的三

角形：半个等边三角形和一个等腰直角三角形（即半个正方形），可以造出五种正立体图形中的四种：正四面体、立方体、正八面体与正二十面体，分别代表火、土、气和水四种元素。

三、具有较广泛的知识并能适当联系

例 5 方与圆的联系。

1. 天圆地方（中国古人的宇宙观）。天坛是圆的，地坛是方的。北朝民歌《敕勒川》中的“天似穹庐，笼盖四野”，穹庐是圆的，四野是方的。八卦图，内圆外方，方外有圆，太极是圆，八卦为方（八卦对应八个方位）。罗盘是圆的，指向的方位是方的。

2. 方和圆，几何的两个基本符号。四边形的内角和及外角和，均等于圆周角 360°。方中有圆，或圆外有方：正方形的内切圆，圆的直径长即正方形的边长。圆内有方，或方外有圆：正方形的外接圆，圆的直径与正方形的对角线等长。化圆为方（圆积求方，古希腊尺规作图不能问题）。直角坐标系是方的，极坐标系是圆的。$x^2+y^2=r^2$，方和圆，几何与代数的联姻。

3. 方和圆，日用的两个基本形状。算盘是方的，算盘珠子是圆的。象棋子、围棋子是圆的，棋盘是方的。篮球、足球、排球、网球是圆的，场地是方的。乒乓球、台球是圆的，球桌是方的。茶壶、茶杯是圆的，茶盘多是方的。邮票是方的，邮戳是圆的。函件是方的，印鉴多是圆的。照相机的镜头是圆的，照片是方的。放映机的镜头是圆的，银幕是方的。门是方的，锁孔是圆的。火车车轮是圆的，轨道是方的。法槌是圆的，底座是方的，取“规矩”之意，寓“司法公正”。

4. 方和圆，建筑的两个基本构形。凯旋门、桥拱、伊斯兰建筑门廊、田径场地、意大利圣彼得大教堂广场，方圆接合。上海环球金融中心大厦、钟楼，方中镶圆。圆柱、神庙的石柱、祠堂的木柱、灯塔，俯看成圆侧成方。碉堡是圆的，瞭望孔是方的。灶台是方的，炉心是圆的。“对于人，眼睛是灵魂的窗户，对于房间，窗户则是建筑灵魂的眼睛。”[赵鑫珊著：《建筑是首哲理诗》，百花文艺出版社，

1998.10],而眼睛是圆的,窗户多是方的。

5. 《周髀算经》记:"环矩以为圆,合矩以为方"(用矩作圆、作方)。《庄子》等记:"圆者中规,方者中矩"。《墨子》记:"轮匠执其规矩,以度天下之方圆"。《周髀算经》记:"数之法,出于圆方,圆出于方,方出于矩,矩出于九九八十一"。《孟子》记:"不以规矩,不能成方圆"。"伏羲氏手执矩,女娲氏手执规"(女娲伏羲氏规矩图)[夏明德著:《数学大观园》,上海科学普及出版社,1994.12]。

6. 方与圆,对立与统一。圆(图形)是圆的,圆字(汉字)是方的。日是圆的,日字是方的。目是圆的,目字是方的。井多是圆的,井字是方的。

例 6 扑克牌数与黄金数的联系。

1. 扑克牌有 54 张。54°的余角是 36°。顶角是 36°的黄金三角形的底角是 72°,五角星的每个角都是 36°。正五边形的内角是 108°,外角是 72°,108°与 72°互为补角。圆的周角五等分,每份即圆心角为 72°。五角星是天然的黄金五角星,里面有着丰富的黄金三角形及其黄金分割率。36°是 18°的两倍,54°是 18°的三倍,18°与 72°互为余角。18°的正弦值、72°的余弦值都是黄金分割率的一半,即 $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \dfrac{\rho}{2}$,其中 $\rho = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是黄金分割率。

2. 两部中国古典文学名著《西游记》和《水浒传》都分别隐含有神秘的数字:孙悟空有 72 变,猪八戒有 36 变,梁山好汉有 108 条。天上有 36 天罡,地上有 72 地煞。孔子的弟子"盖三千焉,身通六艺者七十有二人"。故宫(紫禁城)占地 72 万平方米。"天下西湖,三十有六"。太湖有七十二岛屿。延河有七十二道弯。庐山有七十二峰。武当山有七十二峰。唐古拉山有七十二盘。峨嵋山有 36 景 72 峰。嵩山有七十二寺。天台山的道教有 36 宫 72 观 144 级台阶。福建南平溪源峡有 36 景 72 曲。福建永定永隆昌土楼有 144 道台阶。

3. 满汉全席有 108 道菜。秦分天下 36 郡。柯达彩色冲印胶卷有 36 张。欧阳询的书格结字规律,有"欧阳结体三十六法"。[徐

峙、马妍编著:《中国名人速查手册(彩图版)》,北京:中国书籍出版社,2004.9]。据报载,“神舟”三号飞船按照预定轨道,环绕地球飞行了108圈。

中央电视台第4频道曾播出“面对面”节目“行行出状元”,介绍重庆的罗福欢擦鞋全国连锁店。其招牌“擦鞋”二字用72把鞋刷拼成,寓意72行,行行出状元。

“皇家园林,以清初的热河(河北承德)避暑山庄为最大。园林有真山真水,康熙帝的时候园里就有36景,到乾隆帝的时候又增加到七十二景。”[陈美东主编:《简明中国科学技术史话》,北京:中国青年出版社,1997]。

4. 36°的补角是144°。将36加36等于72,又加36等于108,再加36等于144。144是平方数,$12^2=144$。把左边的底数12这两个数字翻了个个儿,成了21,结果右边的三个数字也跟着倒过来,成了$21^2=441$。再看,$112^2=12\,544$,把112倒过来成了211,则12 544也跟着倒过来,成了$211^2=44\,521$。还有,$122^2=14\,884$,$221^2=48\,841$;$1122^2=1\,258\,884$,$2211^2=4\,888\,521$;……

类似地,$13^2=169$,$31^2=961$;$113^2=12\,769$,$311^2=96\,721$;$1113^2=1\,238\,769$,$3111^2=9\,678\,321$;……

例7 统一性的联系。

1. 运算统一性:

加法,人类习得的最简单、最原始、最基本的运算。

减法,是加法的逆运算,减法可以转化为加法。

乘法,是同一个数连加,是特殊的加法,是浓缩的加法。

除法,是乘法的逆运算,除法可以转化为乘法。

对一个角取三角函数式,可视为一种运算。每一个三角函数式都是由一个比式来定义的,即每一个三角函数式都是由一个除法来构建的。

反三角函数作为函数,是三角函数的反函数。对符合相关定义的数取反三角函数式,可视为一种运算。反三角函数作为运算,是

三角函数的逆运算。

乘方，是同一个数的连乘积，是特殊的乘法，是浓缩的乘法，它的结果称作幂 a^n。

幂函数式 x^n，可视为幂 a^n 的常数底数 a 衍变为变量底数 x 而来。

指数函数式 a^x，可视为幂 a^n 的常数指数 n 衍变为变量指数 x 而来。

对数函数作为函数，是指数函数的反函数。对一个正数取对数可视为一种运算。对数函数作为运算，是指数函数的逆运算。

可见，上述各种运算都可追溯到加法。

2. 三角形面积公式统一性：

三角形的面积公式：$S=\frac{1}{2}ah$。其中 a 是一边的长，称作底，h 是这条边上的高，简称高。

三角形的另一个面积公式：$S=\frac{1}{2}pr$。其中 p 是三角形的周长，可视为“底”，是“周底”；r 是三角形内切圆的半径，可视为“高”。

扇形的一个面积公式：$S=\frac{1}{2}lr$。其中 l 是弧长，可视作底，是“曲底”；r 是半径，可视作“高”。这样，如果视三角形为“直底”、“直边”三角形，那么扇形就是“曲底”、“曲边”三角形，且有无数多个“高”，但等高。

相对于劣弧扇形，优弧扇形可视作“较丰满”的扇形，而圆就是“丰满”、“完满”、“圆满”的扇形了。

圆的一个面积公式：$S=\frac{1}{2}cr$。其中 c 是圆周长，是完全闭合的弧长，是“圆周底”；r 是半径，可视作“高”。这样，圆有无数多个“高”，但等高。

正方形的一个面积公式：$S=\frac{1}{2}ph$。其中 p（$p=4a$，a 是边

长)是周长，可视为“底”，是“周底”；h $\left(h=\frac{a}{2}\right)$ 是中心到边的距离，也是内切圆的半径，可视作“高”。

正方形的另一个面积公式：$S=\frac{1}{2}bh$。其中 b ($b=2a$) 是一组对边的和，可视作底，是“双底”；h ($h=a$) 是边长，视作“高”。

长方形的一个面积公式：$S=\frac{1}{2}ch$。其中 c ($c=2a$ 或 $2b$。a、b 分别是长、宽) 是一组对边的和，视作底，是“双底”；h ($h=b$，或 a) 视作“高”。

长方形的另一个面积公式：$S=\frac{1}{2}ph$。其中 p($p=2a+2b$，a、b 分别是长、宽) 是周长，视作底，是“周底”；h $\left(h=\frac{ab}{a+b}\right.$，$a$、$b$ 的半调和平均数$\left.\right)$ 视为“高”。(a、b 的半调和平均数$\frac{ab}{a+b}$，由矩形构造相应的梯形可得。设矩形的长为 a(长边)，宽为 b(短边)。以 b、a 作为上下底，高为 b，构造梯形，则对角线的交点到长底边 a 的距离就是 a、b 的半调和平均数)

平行四边形的一个面积公式：$S=\frac{1}{2}ch$。其中 c ($c=2a$，a 是一边的长)是一组对边的和，视作底，是“双底”；h 是以 a 为底的高，也视为以 $2a$ 为“底”的高。

菱形的一个面积公式：$S=\frac{1}{2}mn$。其中 m、n 分别是两条对角线长。菱形的对角线互相垂直。m、n 可互为底和高。

梯形的一个面积公式：$S=\frac{1}{2}ch$。其中 c ($c=a+b$，a、b 分别是上、下底)视作底，是“上下底”；h 是高。

正 n 边形的一个面积公式：$S=\frac{1}{2}b_n r_n$。其中 b_n($b_n=na_n$，a_n 是边长)是周长，可视作底，是“周底”；r_n 是边心距，也是内切圆的半

径，视作“高”。

可见，常见“规范的”平面图形的面积公式可以统一表示为三角形面积公式的模式。

3. 二次函数统一性：

二次函数：$y=ax^2$，图象是抛物线。正方形的面积公式：$S=a^2$。圆的面积公式：$S=\pi r^2$。球的表面积公式：$S=4\pi r^2$。自由落体运动规律：$h=\frac{1}{2}gt^2$，其中 g 为重力加速度，可视作常量。动能公式：$E_k=\frac{1}{2}mv^2$（其中质量 m 为定量时）。电功率计算公式：$P=RI^2$（其中电阻 R 为定量时）。向心加速度：$a=r\omega^2$（其中半径 r 为定量时）。圆环的面积公式：$S=\frac{1}{4}\pi d^2$，其中 d 是内圆的切线夹在外圆内的弦长。爱因斯坦的质能公式：$E=mc^2$（其中质量 m 为定量时）。可见，二次函数有着较为丰富的数学或物理模型。

第2节　教师专业修养

一、善于倾听学生与关注学生

教师在课堂上一旦真心实意地欢迎学生的插嘴，心悦诚服地接受学生的质疑，专注地倾听学生的意见和见解，课堂就一定会闪现出精彩光耀的瞬间，学生就一定会在不期而遇的瞬间迸发出最原始、最自然的认知冲动和求知欲望。

例8　学生的质疑、见解及其思考。

1. 在学习角平分线的概念时，同学提出，如果从角的顶点引出两条射线，把角分成三个相等的角，那么这两条射线是否也可以叫做这个角的平分线？

由角的二等分，联想到角的三等分，这是一个自然的延拓，如老

子所言："道生一，一生二，二生三，三生万物"。但并非每个学习者，甚至教学者，都能联想到的。

平分的本意是平均分配。角的二等分与角的三等分，都属于平分，因此产生概念冲突，需要区别。事实上，"平分"常常是指二等分，即"对半"，如"对角线互相平分"、"线段的垂直平分线"。

"二"在初等数学中具有特殊的、重要的地位，常常被专门命名或特别对待。如二次根式的符号，直接用根号表示，免了根指数 2；二次曲线还特别称作圆锥曲线；二等分点称作中点。角的二等分线就专门称作角的平分线。可以类比"线段的三等分点"，称"角的三等分线"。

2. 在初学幂的运算中指数均取正整数时，同学提出，2^{-2} 是什么？$2^{0.5}$ 又是什么？

由正整数指数幂的运算，联想到负整数指数幂和分数（小数）指数幂，既是超前的思考，也是自然的思考，同样也是不多学习者的思考，反映了数（数的领域）的不断扩充思想的形成，也反映了由常量到变量概念的形成趋向。

3. 在谈到因式分解是一种和差化积的模式变换时，同学提出，为什么把低级运算转化为高级运算，意义何在？

化高级运算为低级运算，化高次方程为低次方程，化高阶为低阶，化未知为已知，化复杂为简单，是一种具有普遍意义的化归的数学方法与思想，是一种辨证的进退关系。

整式乘法与因式分解互为逆运算，显现出积化和差与和差化积两种完全相反的变换模式，转化的方向完全依数学问题或数学活动的目的和需要而定。如因式分解通常应用于分式运算或方程理论。又如幂的运算法则中的积化和差模式，以及后续学习中的指数函数运算具有和差化积商的性质，对数函数运算具有积商化和差的功能。

4. 在谈到运用实验的方法来研究频率与机会时，不少学生提出，很多事件出现的可能性都能知道（能想出，能算出，能看出），为

什么还要做实验？

实验，不仅限于物理实验、化学实验和生物实验，实验同样适用于数学。概率实验更是一种常常难以替代的数学方法，如掷图钉问题，是既看不出，算不出，也想不出的。之所以对能看出、算出、想出的概率问题，还要做实验，这是对概率实验方法及其可信度的确认，是引介新的数学方法时常用的简单背景原则。

5. 在介绍利用图象解二元一次方程组时，同学提出，一眼就能看出方程组的解，为何如此麻烦去画图？

这同样是在引介新的数学方法时所采用的简单背景原则。用过去的方法能够解决的简单问题作为尝试新方法的背景，可以容易地验证新方法的适应性和正确性。一旦遇到过去的方法无法适用、不能解决的问题，新的方法就可能呈现有效性。如探讨超越方程解的个数时，常常使用图象求解的方法。简单背景原则也是一种辨证的进退关系。

6. 在讨论并集的概念时，“由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集”，同学提出，这里为什么用“或”而不用“和”？

“和”，给人以简单加法、简单求和的感觉。后续学习集合的计数原理时，会注意到，两个集合并集的元素个数并非两个集合元素的个数作简单的加法。

“或”，在这里一般有三种情况，它依两个集合交叉的情形为最“丰富”而分。即，“$x \in A$，或 $x \in B$”，实际上包含了三种情况：①$x \in A$，但 $x \notin B$；②$x \in B$，但 $x \notin A$；③$x \in A$，且 $x \in B$。其中，① 和 ③ 体现“$x \in A$”，② 和 ③ 体现“$x \in B$”。而用“和”则没能较直观地体现这三种情况。

7. 在学习函数的概念时，同学提出，由 $y^2 = x + 1$，得 $y = \pm\sqrt{x+1}$，y 与 x 是否是函数关系？

这里提出了多值函数的问题。在中学数学中，主要学习单值函数，即对“第一数”使用全称量词，如“对每一个 x”，或“对任意一个

x”；而对“第二数”则使用存在量词且唯一，即“存在唯一的 y”。也就是函数概念中的“三性”：任意性、存在性和唯一性。

8. 在研究锐角三角函数时，同学提出，现在研究的是锐角三角函数，有没有钝角三角函数？另有同学则提出，为什么锐角三角函数要用直角三角形中边的比值来定义，而不在锐角三角形中讨论？

任意一个三角形必有两个锐角，依第三个角的不同而划分为锐角、钝角和直角三角形三类。其中唯直角三角形中的两个锐角具有独特的互余关系，因此直角三角形边的比例关系完全依赖于其中的一个锐角，这符合函数的概念。所谓锐角三角函数，“锐角”就是指的直角三角形中的锐角，而非锐角三角形概念中的“锐角”。因此锐角三角函数建立在直角三角形的基础上，也为后续学习在平面直角坐标系中定义任意角（包括钝角）的三角函数奠定了根本性的、“原生态”的基础。

9. 在谈到直线和平面所成的角的概念时，同学提出，当直线与平面垂直时，其射影落在垂足上，不能构成平面角，为什么直线和平面所成的角的取值范围包括 90°？

边界问题常常是非常敏感、容易混淆的问题，可能是极端情形，也可能是退化情形；可能是渐变的情形，也可能是突变的情形；可能可以被包容，也可能不被包容。

直线和平面所成的角，是由直线及其在平面内的射影所构成的平面角来定义的。直线与平面垂直，是直线和平面所成的角的一个边界情形。就角度的变化而言是渐变的，但就直线和平面所成的角的定义而言则是一个突变，因此是一种特殊的情形。由于直线与平面垂直给人们的印象是深刻而牢固的，并且直线与平面垂直的原始定义是直线与平面内的任意一条直线垂直，即无论是相交直线垂直或异面直线垂直，都可以用 90°来衡量。因此，直线和平面所成的角的取值范围可以包括 90°。

二、充分利用学生群体资源

学生群体本身是一种潜在的、丰富的、可利用的资源，应充分利

用这种资源进行有效的教学。

例 9 华东师大版教材数学七年级下册有一道练习题：编一道联系实际的数学问题，使所列的方程是 $3x+4(45-x)=150$。

如果只当作一道普通作业题，教师批改了各自发回，那么就错过了一次精彩的教育资源的利用。事实上，学生的作品可谓五花八门，五彩纷呈。通过实物投影仪，展示在课堂上，搭建学生相互交流的平台，就成了学生认可与被认可、欣赏与被欣赏的最自然、最可接受的方式。同时真切地体现了数学模型的高度抽象性，因为构成该数学模型的背景居然是可以千差万别的。采撷部分学生的作品如下（括号内是学生的即兴调侃——值得玩味）：

生$_1$：有花生共重 45 千克，其中较好的价格为 4 元/千克，较次的为 3 元/千克，共卖出 150 元，问较好的、较次的花生各多少？（花生的价格便宜了点。哪儿有的卖？也帮我多买点）

生$_2$：小雪做纸花，有红、白、黄三种颜色。已知白花和黄花共有 150 朵，白花是红花的 3 倍，白花和红花共有 45 朵，黄花是白花的 4 倍。求红花有多少朵？

生$_3$：爸爸 45 岁，爸爸的岁数减哥哥的岁数的差的 4 倍与哥哥岁数的 3 倍的和是 150。求哥哥的岁数。（哈哈！“爸爸”早婚！宜改“哥哥”为“堂哥”或“表哥”）

生$_4$：有石头 150 吨。小卡车每次运 3 吨，运了几次，后来换成大卡车，每次运 4 吨。大、小卡车一共运了 45 次，问小卡车运了几次？

生$_5$：甲、乙两地路程为 150 千米，一只乌龟先以每小时 3 千米的速度爬行，由于时间关系，它加快了速度，以每小时 4 千米的速度前进。已知它从甲地到乙地共用了 45 小时，问它以每小时 3 千米的速度爬行了几个小时？（哈哈！没见过、也没听说过有爬这么快的乌龟！）

生$_6$：有 3 个班级共 150 人，要外出参观展览馆，需租汽车接送。一辆巴士与一辆面包车共能载 45 人，一共租了 3 辆巴士和 4 辆面包车，刚好载完所有人，问每辆巴士能载多少人？

生$_7$:有 45 个同学搬砖头,女生一人一次搬 3 块,男生一人一次搬 4 块。一共搬了 150 块,问有多少个女生?(我可不止搬这么点)

生$_8$:食堂有 150 吨煤,起初 3 天每天用煤 x 吨,技术改进后每天烧$(45-x)$吨,4 天后用完煤。求那 3 天每天烧几吨煤?(没听说过有这么会“食”煤的食堂!宜改“吨”为“千克”)

生$_9$:市政府计划修一条水渠,长达 150 米。已知甲、乙两工程队合做一天可修 45 米。现先由甲队独做 3 天,再由乙队独做 4 天,完成了工程,问甲队每天可修几米?

三、加强对话交流、促进教学相长

对话产生智慧,交流增进和谐。加强对话交流,便能促进教学相长。

例 10 课堂中对话交流举例。

1. 教学“把多项式 $a^3+b^2-3a^2b-3ab^3$ 按要求重新排列”时,同学提出,假如还有一项 c^2,怎么办?还有同学提出,假如式中含有 b^{-1},怎么办?

多项式常常按某个字母的升幂或降幂排列。例如按字母 a 的降幂排列,那么 b^2 和 c^2 都视作常数项,它们两者的顺序可依照 26 个拉丁字母的顺序排列为 b^2+c^2。

由正整数指数幂,超前提出负整数指数幂,源于指数降幂“规律”的联想,如 $3\to2\to1\to0\to-1\to-2$。负整数指数幂可归属于后续学习分式内容的范畴,不属于多项式的范畴。

2. 在学习余角和补角的概念时,同学提出,0°角与 90°角互为余角吗?又有同学提出,角度是否有负的?如果有,那么$-3°$的角与 93°的角是否称得上互余?还有同学提出,如果三个角的和等于 90°,那么它们可以叫做互为余角吗?如果两角之和为 360°,那么它们又可以称作什么关系呢?

根据定义,两个角的和等于直角,就说这两个角互为余角,因此,0°角与 90°角、$-3°$角与 93°角都是互为余角。类似于数的扩充,

后续学习角的扩充(包括负角)。在目前主要是对两个锐角而言的。

互余是对两个角而言的。定义两角互余的根本目的是两者可以互相转化,是一种可变化的不变量(即和为直角)。其在直角三角形及后续学习三角函数中,都具有特殊的、重要的地位。而和为直角的三个角之间的关系则较为复杂,一般没有特殊的应用价值,因此不作特别定义。

3. 大家知道,用一副三角尺按不同位置放置,可出现如下一些确定度数的特殊角:15°、30°、45°、60°、75°、90°、105°、120°、135°、150°。我们注意到,它们恰好构成公差为15°的等差数列,遗憾的是,在150°和180°之间刚好缺一个165°,不知如何放置三角尺才能产生。没想到有好几位同学解决了笔者多年搁置的一个困惑:将一副三角尺的两条直角边分别置于同一射线上,直角顶点重合时,两条斜边所夹的角("剪刀口"形)就是165°。

4. 在阅读"圆"一章的章导语时,同学一下子列举了七点来表明圆的完美:简单之美,只用一条边就构成的图形;平和之美,中心点到圆周上任一点的距离相等;个性之美,无论怎样旋转、翻转、移动,始终是同一形状;大气之美,相同周长条件下,与其他图形比,面积最大;轻柔之美,无棱角,是为匀称、和谐,可以转动;延伸之美,所有的圆均是相似形;神秘之美,圆周率是无理数,人类永远不能精确求出。

5. 在讲授同底数幂的乘法法则时,由"同底数幂相乘,底数不变,指数相加",同学提出,把"相乘"改为"相除",则"相加"改为"相减"。紧接着,又有同学提出,把"相乘"改为"乘方",则"相加"改为"相乘"。同学还联想到"同分母分数相加,分母不变,分子相加"与上述法则对仗。

6. 在学习函数的奇偶性概念时,生$_1$提出,$f(x)=0$是唯一既满足$f(-x)=-f(x)$,又满足$f(-x)=f(x)$的情形,因此,它既是奇函数,又是偶函数。生$_2$对"唯一性"提出质疑,同样是$f(x)=0$,它的定义域不同,就构成了不同的函数。生$_3$提出质疑,由$f(x)=0$,得

$f(2) = f(4)$，此时，图象的对称轴是 $x = 3$，不是 y 轴，那么 $f(x)$ 还是偶函数吗？

生$_1$所举的列子，非常漂亮！但“问题”出在“唯一”上，遭到生$_2$的质疑，生$_2$的观点，非常精彩！

生$_2$对生$_1$的“唯一性”的质疑，如果是仅仅针对函数的关系式（或表达式）“$f(x) = 0$”而言，那么其质疑是不力的。因为生$_1$提出的“$f(x) = 0$”，如果是包括“$x \in \mathbf{R}$”作为函数 $f(x) = 0$ 的“自然的”定义域的话，那么它作为既是奇函数，又是偶函数的函数，确实是唯一的，是独一无二的。

生$_2$对生$_1$的“唯一性”的质疑，如果是针对“函数 $f(x) = 0$ 是唯一的既是奇函数，又是偶函数的函数”而言，那么其质疑是有力的。因为既是奇函数，又是偶函数的函数并不是唯一的。

生$_3$提出的问题，很有创意！但有一个认识上的误区。也就是后续学习内容“必要条件”、“充分条件”、“充要条件”的关系和区别问题。事实上，任意一条直线 $x = a$ 都是函数 $f(x) = 0$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象（即 x 轴）的对称轴，其中当然包括 y 轴（即直线 $x = 0$）。而一个函数的图象，不管它是否有其他的对称轴，有多少条对称轴，只要关于 y 轴是对称的，我们就称它是偶函数。

在讨论“根据函数的奇偶性，由函数 $f(x) = x^3 + x$ 在 y 轴右边的图象，画出它在 y 轴左边的图象”时，生$_2$提出用两次折纸的方法；生$_1$提出，旋转 180°；而众多学生提出，连续两次关于坐标轴（x 轴和 y 轴）的轴对称变换；更有部分同学提出，连续两次关于直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 的轴对称变换。这样，就把中心对称、轴对称、旋转对称等联系在一起了。

7. 在球的表面积公式中，有同学把 $S = 4\pi R^2$ 改写为 $S=2\pi R \cdot 2R$，即“赤道”周长与直径的积。更有同学用 $2\pi R$ 来比喻腰围，$2R$ 比喻身高，以形容矮胖者“身高三尺，腰围三尺三”，因为球形就是一种“矮胖者”。在学到球体体积公式时，有同学把 $V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^2$ 改写为

$V_{球} = \pi R^3 + \frac{1}{3}\pi R^3$，即 $V_{球} = V_{圆柱} + V_{圆锥}$。因为凭感觉，半球体介于同高及同底面半径的圆柱体与圆锥体之间，既不像圆柱体那样丰满，又不像圆锥体那样尖锐。

8. 在学习两条直线平行与垂直的判定时，由"$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$"，生$_1$提出，当 $k_1 + k_2 = 0$ 时，如何描述两条直线的位置关系？可不可以说两条直线组成图形的对称轴平行于 y 轴？生$_2$接着指出，另一条对称轴平行于 x 轴。生$_3$指出，这两条直线的倾斜角互补。生$_4$则提出，这两条直线可以都是水平线，未必相交。又由"$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$"，生$_5$提出，如果两条直线的倾斜角互余，那么 $k_1 \cdot k_2 = 1$。生$_6$则表示，当 $k_1 \cdot k_2 = 1$ 时，两条直线的倾斜角不一定都是锐角，可以都是钝角，但它们的补角互余。

由经典、深刻的几何模型：平行和垂直，与简洁的、对称的代数模式：$k_1 = k_2$ 和 $k_1 \cdot k_2 = -1$，联想到另一组同样简洁的、对称的代数模式：$k_1 + k_2 = 0$ 和 $k_1 \cdot k_2 = 1$，并由此判断出相应的几何模型，学生的智慧、联想令人叹为观止。



[General Information]
书名=如何上好一堂教学课
作者=曾大洋主编
页数=174
出版社=华东师范大学出版社
出版日期=2009.10
SS号=12357433
DX号=000006809510
url=http://book2.duxiu.com/bookDetail.jsp?dxNumber=000006809510&d=6184ACD025DB71986CFCECE8939428CE&fenlei=0705180406&sw=%C8%E7%BA%CE%C9%CF%BA%C3%D2%BB%CC%C3%CA%FD%D1%A7%BF%CE